

Linearização em Torno de Um e Dois Tons Aplicada nos Domínios da Frequência e do Tempo

Dhessica M. S. de Moura, Maysa A. C Araújo, Eduardo G. de Lima

Grupo de Concepção de Circuitos e Sistemas Integrados
Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil

dhessica.moura@ufpr.br, maysaalves@ufpr.br, elima@eletrica.ufpr.br

Resumo – Para um circuito composto por uma fonte de alimentação CA, com quantidade de tons variável, e um componente não linear elaboramos esse artigo com o intuito de explorar a eficácia de alguns métodos de análise de circuitos, abordando a linearização de circuitos para um e dois tons aplicada nos domínios da frequência e do tempo. Utilizou-se, além dos métodos de linearização e superposição de circuitos, Análise Periódica em Corrente Alternada (PAC), Equilíbrio Harmônico (HB), Mapeamento Artificial de Frequência (AFM) para as análises no domínio da frequência e Método do Tiro (SM) para as análises no domínio do tempo, concluindo com discussões sobre a eficácia dos métodos comparados entre si. Considerações sobre essas análises são realizadas baseadas em comparações no ambiente Matlab.

I. INTRODUÇÃO

O uso de simulações na área de circuitos elétricos e eletrônicos é recomendado para todo tipo de circuito, dos mais simples aos mais complexos, isto porque as simulações de circuitos oferecem apenas vantagens para os projetistas. Através delas é possível verificar se o circuito se comporta da forma esperada, tem-se alta flexibilidade quanto à correção de erros e otimização de circuitos, além de prevenir a implementação de circuitos equivocados, assim auxiliando na economia de recursos como tempo, materiais e mão de obra.

Existem diversos ambientes de simulação de circuitos, que se diferenciam pelo método de análise utilizado, os quais dependem do progresso no tempo das fontes independentes e da necessidade, ou não, da parcela referente à resposta transitória (MAAS, 2003). Referindo-se à análise de circuitos em grandes sinais, que possui como alimentação do circuito fontes independentes de tensão e/ou corrente periódicas no tempo atuando em n tons, o regime permanente é a faixa de interesse. Essa análise pode ser abordada tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo. Quando a análise é feita no domínio da frequência, as incógnitas são amplitudes de senos e cossenos constantes no tempo, e após obter essas amplitudes é possível conseguir todas as formas de onda de tensão e corrente para qualquer instante no tempo (MAAS, 2003, Cap. 3). Já no domínio do tempo as incógnitas são valores de tensão e correntes para instantes igualmente

espaçados no tempo, ou seja, ao contrário de uma análise no domínio da frequência os valores de tensão e corrente estão disponíveis apenas para uma quantidade finita de instantes no tempo (MAAS, 2003, Caps. 1 e 2).

Sabe-se que componentes eletrônicos não lineares produzem ondas harmônicas no circuito, porém, na prática, nem todos os tons das fontes independentes possuem amplitudes capazes de gerar esses distúrbios (MAAS, 2003, Cap. 1). Nos casos de circuitos que possuem componentes não lineares e mais de uma fonte de tensão e/ou corrente independente é possível reduzir a complexidade das análises através do uso das técnicas de linearização e superposição, as quais podem ser aplicadas tanto no tempo quanto na frequência, e obter a resposta final pela soma de uma análise não linear de grandes sinais para os tons de amplitudes mais significativas mais uma análise linear de pequenos sinais para os tons de amplitudes menos significativas. Detalhes para os casos de linearização em torno de um e dois tons serão discutidos no decorrer desse artigo, objetivando comparar como os métodos de linearização nos domínios do tempo e da frequência se comportam ao variar da quantidade de tons em grandes sinais.

II. ANÁLISE DE GRANDES SINAIS

Em uma análise de grandes sinais, pode-se obter a seguinte equação analítica genérica, de tensão ou corrente $x(t)$, para 3 tons:

$$x(t) = X_0 + \sum_{h_1=-H_1}^{H_1} \sum_{h_2=-H_2}^{H_2} \sum_{\substack{h_3=-H_3 \\ se(h_1\omega_1+h_2\omega_2+h_3\omega_3)>0}}^{H_3} \cdot \left[X_{h_1 h_2 h_3} sen[(h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3)t] + X_{h_1 h_2 h_3} cos[(h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3)t], \right] \quad (1)$$

onde X indicam amplitudes constantes no tempo associadas a senos e cossenos com frequências angulares ω_1 , ω_2 e ω_3 truncados em H_1 , H_2 e H_3 , respectivamente.

Considerando um caso de um circuito com dois tons, onde o primeiro tom recebe a análise de grandes sinais e o segundo tom recebe a análise de pequenos sinais, a equação genérica de tensão ou corrente para esse caso seria igual a equação (1) com H_3 igualado a zero e com H_2 igualado a 1, ou seja, apenas a frequência fundamental do segundo tom é considerada, enquanto o primeiro tom

considera todas as H_1 harmônicas truncadas pelo projetista. Essa mesma lógica se aplica para o caso de três tons, onde o primeiro e o segundo tons recebem a análise de grandes sinais e o terceiro tom recebe a análise de pequenos sinais. Nesse caso, H_3 é igualado a 1 na equação (1).

III. LINEARIZAÇÃO E SUPERPOSIÇÃO

De forma geral, o método de linearização de circuitos eletrônicos é susceptível a generalização, ou seja, o passo a passo básico desse método pode ser aplicado para diferentes abordagens de análise de circuitos. Então, utilizando a série de Taylor truncada na primeira ordem para linearizar uma equação não linear $f_{NL}(x)$ presente em um circuito basta derivar a equação do componente em relação à sua trajetória inicial:

$$f_{NL}(x) = \frac{df_{NL}(x)}{dX} \Big|_{X=X_0} \cdot (X - X_0) \quad (2)$$

onde X_0 é a trajetória inicial.

Para analisar um circuito linear com duas ou mais entradas, uma forma de dividir o problema é explorar a ação de cada entrada isoladamente e posteriormente somar as respostas individuais para obter a resposta total. A resposta completa $x_{total}(t)$ é dada por:

$$x_{total}(t) = x_0(t) + x_{novo}(t), \quad (3)$$

na qual $x_0(t)$ refere-se à resposta do circuito considerando apenas os tons com amplitudes mais significativas e, portanto, sujeitos à análise de grandes sinais e $x_{novo}(t)$ refere-se apenas aos tons com amplitudes menos significativas presentes na análise de pequenos sinais, ou seja, é a parte do circuito que sofre a linearização em função de $x_0(t)$.

IV. LINEARIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A linearização no domínio da frequência é baseada em deduções trigonométricas que dependem da quantidade de tons a partir da qual a linearização é feita.

A. Linearização em torno de 1 tom

Utilizando o método do equilíbrio harmônico para a linearização em torno de 1 tom, chamado de Análise periódica em Corrente Alternada (PAC), pode-se concluir que a equação genérica de trajetória inicial $x_{01tom}(t)$, a ser utilizada na linearização, se comporta como a equação (1), onde H_2 e H_3 são truncados em zero. A resposta completa $x_{total1tons}(t)$ é obtida ao impor na equação (1) que $H_3 = 0$ e $H_2 = 1$. Desta forma a equação linearizada do elemento não linear pode ser visualizada da seguinte forma:

$$x_{1novo1tom}(t) = g_{01tom}(t) \cdot x_{novo1tom}(t) \quad (4)$$

onde $x_{1novo1tom}(t)$ indica a parcela linearizada da incógnita $x_1(t)$ do circuito e $g_{01tom}(t)$ corresponde à derivada da função do componente não linear em função de $x_{01tom}(t)$. Enquanto $x_{novo1tom}(t)$ e $x_{1novo1tom}(t)$ variam igualmente no tempo, em específico com $H_3 = 0$ e $h_2 = \pm 1$ em (1), $g_{01tom}(t)$ varia no tempo da mesma forma que $x_{01tom}(t)$, ou seja, com $H_3 = 0$ e $H_2 = 0$ em (1). Como a multiplicação $g_{01tom}(t) \cdot x_{novo1tom}(t)$ é composta basicamente por interações trigonométricas do tipo seno seno, cosseno cosseno ou seno cosseno, ao aplicarmos algumas propriedades trigonométricas é possível rearranjar a equação (4) em uma multiplicação de matrizes, tal como:

$$x_{novo1tom}(t) = \overrightarrow{G_{1tom}} \cdot \overrightarrow{x_{1tom}(t)} \quad (5)$$

onde $\overrightarrow{G_{1tom}}$ é uma matriz de condutâncias fixas e $\overrightarrow{x_{1tom}(t)}$ é um vetor de senos e cossenos que é dependente da quantidade de harmônicas escolhidas.

É válido salientar que considerar somente H_1 harmônicas para a construção da matriz de condutâncias não é suficiente para produzir uma matriz totalmente preenchida. Para construir uma $\overrightarrow{G_{1tom}}$ com todas as posições tomadas é necessário considerar $2H_1$ na aplicação do método do equilíbrio harmônico, desta forma ampliando a precisão da resposta final.

A matriz de condutâncias $\overrightarrow{G_{1tom}}$ de ordem k, que se relaciona com a quantidade de harmônicas H_1 através de $2 * (2H_1 + 1)$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} g_0 & 0 & \frac{g_2}{2} & \frac{-g_1}{2} & \frac{g_4}{2} & \frac{-g_3}{2} & \dots & \frac{-g_{k-3}}{2} \\ 0 & g_0 & \frac{g_1}{2} & \frac{g_2}{2} & \frac{-g_3}{2} & \frac{g_4}{2} & \dots & \frac{g_{k-2}}{2} \\ \frac{g_2}{2} & \frac{g_1}{2} & g_0 & 0 & \frac{g_2}{2} & \frac{-g_1}{2} & \dots & \frac{-g_{k-5}}{2} \\ \frac{-g_1}{2} & \frac{g_2}{2} & 0 & g_0 & \frac{g_1}{2} & \frac{g_2}{2} & \dots & \frac{g_{k-4}}{2} \\ \frac{g_4}{2} & \frac{g_3}{2} & \frac{g_2}{2} & \frac{g_1}{2} & g_0 & 0 & \dots & \frac{-g_{k-7}}{2} \\ \frac{-g_3}{2} & \frac{g_4}{2} & \frac{-g_1}{2} & \frac{g_2}{2} & 0 & g_0 & \dots & \frac{g_{k-8}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{-g_{k-3}}{2} & \frac{g_{k-2}}{2} & \frac{-g_{k-5}}{2} & \frac{g_{k-4}}{2} & \frac{-g_{k-7}}{2} & \frac{g_{k-8}}{2} & 0 & g_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

onde os índices das amplitudes constantes no tempo são numerados em ordem crescente de harmônicas, sendo que índices ímpares indicam amplitudes de senos e índices pares indicam amplitudes de cossenos. O vetor $x_{1tom}(t)$ correspondente é:

$$\begin{bmatrix} x_{k-2} \text{sen}[(\omega_2 - H_1 \omega_1)t] \\ x_{k-1} \text{cos}[(\omega_2 - H_1 \omega_1)t] \\ \vdots \\ x_8 \text{sen}[(\omega_2 - 2\omega_1)t] \\ x_9 \text{cos}[(\omega_2 - 2\omega_1)t] \\ x_4 \text{sen}[(\omega_2 - \omega_1)t] \\ x_5 \text{cos}[(\omega_2 - \omega_1)t] \\ x_0 \text{sen}(\omega_2)t \\ x_1 \text{cos}(\omega_2)t \\ x_2 \text{sen}[(\omega_2 + \omega_1)t] \\ x_3 \text{cos}[(\omega_2 + \omega_1)t] \\ x_6 \text{sen}[(\omega_2 + 2\omega_1)t] \\ x_7 \text{cos}[(\omega_2 + 2\omega_1)t] \\ \vdots \\ x_{k-4} \text{sen}[(\omega_2 + H_1 \omega_1)t] \\ x_{k-3} \text{cos}[(\omega_2 + H_1 \omega_1)t] \end{bmatrix} \quad (7)$$

B. Linearização em torno de 2 tons

Utilizando o método do equilíbrio harmônico integrado com o método do mapeamento artificial de frequência (AFM) para a linearização em torno de dois tons pode-se concluir que a equação genérica de uma trajetória inicial $x_{02tons}(t)$, a ser utilizada na linearização, se comporta como a equação (1) onde H_3 é truncado em zero. A resposta completa $x_{total3tons}(t)$ é obtida ao impor na equação (1) que H_3 seja igual a um. Desta forma a equação linearizada do elemento não linear pode ser visualizada da seguinte forma:

$$x_{1novo2tons}(t) = g_{02tons}(t) \cdot x_{novo2tons}(t) \quad (8)$$

onde $x_{1novo2tons}(t)$ indica a parcela linearizada da incógnita $x_1(t)$ do circuito e $g_{02tons}(t)$ corresponde à

derivada da função do componente não linear em função de $x_{0_{2tons}}(t)$. Enquanto $x_{novo_{2tons}}(t)$ e $x_{1novo_{2tons}}(t)$ variam igualmente no tempo, em específico com $h_3 = \pm 1$ em (1), $g_{0_{2tons}}(t)$ varia no tempo da mesma forma que $x_{0_{2tons}}(t)$, ou seja, com $H_3 = 0$ em (1).

Enfim, seguindo o exemplo de linearização em torno de um tom, como a multiplicação $g_{0_{2tons}}(t) \cdot x_{novo_{2tons}}(t)$ é composta basicamente por interações trigonométricas do tipo seno seno, cosseno cosseno ou seno cosseno, é possível rearranjar a equação (8) em uma multiplicação de matrizes, tal como:

$$\overrightarrow{x_{novo_{2tons}}}(t) = \overrightarrow{G_{2tons}} \cdot \overrightarrow{x_{2tons}}(t) \quad (9)$$

onde $\overrightarrow{G_{2tons}}$ é uma matriz de condutâncias fixas e $\overrightarrow{x_{2tons}}(t)$ é um vetor de senos e cossenos que varia em função da quantidade de harmônicas escolhidas.

No uso do HB integrado com o AFM, assim como na linearização em torno de um tom, também há a necessidade de dobrar a quantidade de harmônicas desejadas para uma resposta mais precisa. A diferença é que como são dois tons devemos dobrar a quantidade de harmônicas, H_1 do primeiro e H_2 do segundo tom. A dimensão da matriz de condutâncias fixas pode ser calculada com $2 \cdot (1 + (2 \cdot (H_2 + H_1 \cdot (2 \cdot H_2 + 1))))$, ou seja, uma matriz $\overrightarrow{G_{2tons}}$ para o caso $H_2 = H_1 = 1$ retorna uma matriz com dimensão 18×18 que é multiplicada por um vetor $\overrightarrow{x_{2tons}}(t)$ de dimensão 18×1 , conforme exemplificado na equação (16) de (MOURA, 2019, P.3).

Existe a possibilidade de generalizar a matriz $\overrightarrow{G_{2tons}}$, porém o nível de dificuldade é muito maior do que o necessário para generalizar a $\overrightarrow{G_{1tom}}$. Isso acontece devido ao relacionamento específico das harmônicas H_2 e H_1 , onde as contribuições de senos e cossenos possuem coeficientes variando entre $h_1 \cdot \omega_1 + h_2 \cdot \omega_2$, sendo que $|h_1| \leq H_1$ e $|h_2| \leq H_2$, onde $0 < h_1 < H_1$ e $h_2 = 0 \pm 1, 2 \dots H_2$ e para o caso específico de $h_1 = 0$, $h_2 \geq 0$ (MAAS, 2003, p.207).

Para fins de exemplificação, e considerando que precisaríamos atribuir 3 harmônicas para cada tom para construir uma matriz com dimensões suficientes para ser generalizada, chegaríamos numa matriz de dimensão 98×98 . Então como demandaria muito tempo e como não há aplicação prática de um sistema como esse foi decisão dos pesquisadores não avançar nesse assunto por enquanto.

V. LINEARIZAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Para a análise do sistema no domínio do tempo, aplicou-se o método do tiro, cujo objetivo é encontrar as condições iniciais que garantam que o sistema esteja em regime permanente.

A ordem do sistema corresponde à quantidade de variáveis de estado que são tensões sobre capacitores ou correntes sobre indutores. O sistema é resolvido para cada instante de tempo $\Delta t = \frac{T}{2H}$, sendo T o período fundamental e H o número de harmônicas consideradas.

O valor de cada variável de estado $V(T)$, obtido após a simulação de um período da fundamental, é subtraído pelo valor inicialmente atribuído $V(t_0)$ e estes valores devem ser idênticos.

Aplica-se inicialmente o método ao circuito não linear e posteriormente ao circuito linearizado em torno do primeiro resultado. A resposta completa do comportamento do elemento não linear é obtida por meio da superposição:

$$i(t) = i_{MT}(t) + i_{lin}(t) \quad (10)$$

A. Linearização em torno de 1 tom

Anulando-se a influência do segundo tom, o método do tiro é aplicado ao circuito original, alimentado por uma fonte independente com um tom $V_S(t)$ de frequência f_1 e é obtido $i_{MT}(t)$. As tensões e correntes obtidas são sinais periódicos para uma quantidade finita de instantes de tempo e o período das funções é $\frac{1}{f_1}$.

Após a linearização da função em torno de $i_{MT}(t)$, como exemplificado em (1), o sinal se torna variante no tempo com frequência f_1 e este circuito é então alimentado pelo segundo tom $v_S(t)$ que injeta uma tensão com frequência f_2 e é aplicado o método do tiro a este novo sistema. O transitório de um ciclo do sistema equivalente também é linear.

A análise do circuito linearizado $i_{lin}(t)$ pode ser descrita como:

$$i_{lin}(t) = g_m(t) \cdot v_S(t) \quad (11)$$

em que $g_m(t)$ é um sinal variável no tempo com componentes de frequências iguais a $h \cdot f_1$, com $h=0, 1, \dots, H$.

Ao multiplicar as duas funções $g_m(t)$ e $v_S(t)$, sendo ambas equações trigonométricas, realiza-se o produto entre dois senos ou cossenos, obtendo-se como resposta um sinal que varia no tempo com frequência igual a $\pm h \cdot f_1 \pm f_2$, considerando-se apenas as frequências positivas, sabendo-se que $f_2 > f_1$. Desta forma, no circuito linearizado, o período fundamental é $\frac{1}{f_1 - f_2}$.

B. Linearização em torno de 2 tons

Para a linearização em torno de dois tons, o método do tiro não linear é realizado utilizando-se uma fonte independente com dois tons e o período fundamental é $\frac{1}{f_1 - f_2}$. O método do tiro é então aplicado ao circuito linearizado com fonte independente com um terceiro tom com frequência f_3 . Como o período da fundamental do circuito não linear é maior, a quantidade de instantes para simular aumenta drasticamente.

VI. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para aplicar os métodos de linearização citados nos itens anteriores fez-se uso do circuito exibido na figura 1, o qual foi retirado de (SCHUARTZ, 2018, p. 2).

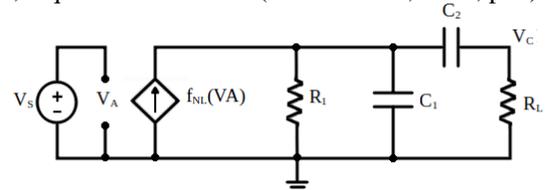


Figura 1 – Circuito utilizado

Na figura 1, V_S é uma fonte de tensão senoidal de dois ou três tons, com amplitudes e frequências fundamentais diferentes. Os parâmetros fixados para esse circuito são $C_1 = 10 \text{ pF}$, $C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_L = 50 \text{ }\Omega$, $f_1 = 1 \text{ GHz}$, $f_2 = 1,1 \text{ GHz}$ e $V_{S1tom} = 1,8 \text{ V}$. O elemento não

linear do circuito é a fonte de corrente controlada pela tensão VA, cuja expressão é a mesma usada em (MOURA, 2019, p.3).

A. Linearização de circuitos em torno de um tom

Na figura 2, foi atribuído V_s com dois tons e foram aplicadas as amplitudes $V_{s_{1tom}} = 1,8 V$ e $V_{s_{2tom}} = 0,2 V$ com truncamento de harmônicas em 10. Os retornos das simulações das linearizações em torno de um tom para o SM, Transitório e PAC são idênticos e atendem ao esperado, ou seja, possuem pico inferior à corrente de saturação I_{sat} . Neste caso o melhor método de análise de circuitos é o que demanda menos cálculos e/ou esforço computacional.

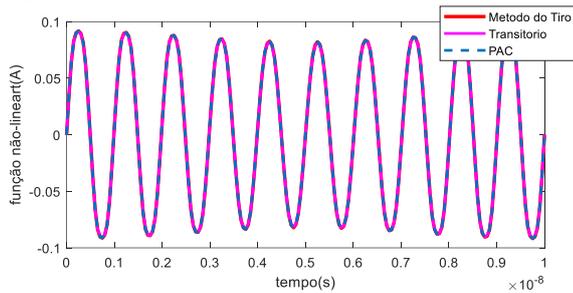


Figura 2 – Respostas das simulações para $V_{s_{2tom}} = 0,2 V$

Na figura 3, manteve-se V_s com dois tons e aplicaram-se as amplitudes $V_{s_{1tom}} = 1,8 V$ e $V_{s_{2tom}} = 1,2 V$ com truncamento de harmônicas em 10. Os retornos das simulações das linearizações em torno de um tom para o SM e PAC são muito similares, porém não seguem o comportamento esperado. Esses sinais são distorcidos e superam o valor da corrente de saturação, enquanto o retorno da simulação de transitório em torno de um tom, com $V_{s_{2tom}} = 1,2 V$, exibe uma curva que possui distorções porém satura em I_{sat} . As distorções ocorrem em função da não consideração das harmônicas do segundo tom, ou seja, devido à linearização do componente não linear em torno do primeiro tom.

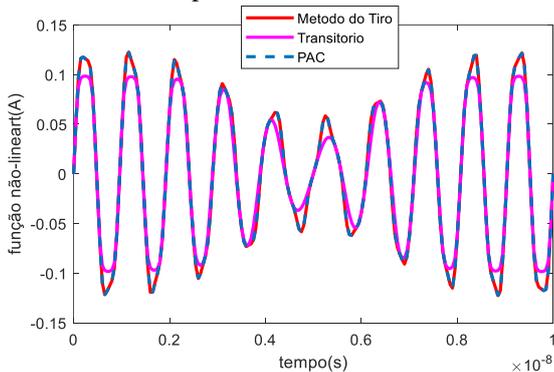


Figura 3 – Respostas das simulações para $V_{s_{2tom}} = 1,2 V$

B. Linearização em torno de 2 tons

Na figura 4, atribuiu-se V_s com três tons e aplicaram-se as amplitudes $V_{s_{1tom}} = 1,8 V$, $V_{s_{2tom}} = 1,2 V$ e $V_{s_{3tom}} = 0,2 V$. Os retornos das simulações das linearizações em torno de 2 tons para o SM e Transitório são muito similares e embora saturem em I_{sat} pode-se observar que há distorções no sinal. No caso da simulação da integração do método HB com o AFM o sinal de retorno exibe uma curva totalmente distorcida e com pico superior a corrente de saturação, isso porque na linearização do

componente não linear em função do primeiro e segundo tons as harmônicas de terceiro tom não são consideradas.

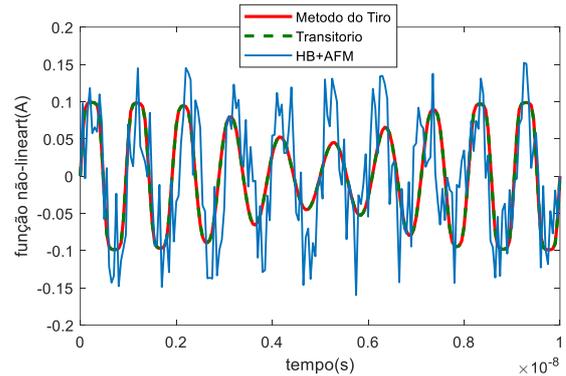


Figura 4 – Respostas das simulações para $V_{s_{2tom}} = 1,2 V$ e $V_{s_{3tom}} = 0,2 V$

No caso específico da figura 4 é importante informar que teríamos uma curva mais apurada para um truncamento de harmônicas maior. Porém como dito na Seção IV nós escolhemos por não estender o método devido ao grau de esforço necessário para tal.

VII. CONCLUSÃO

Tendo linearizado o circuito tanto no domínio da frequência, quanto no domínio do tempo, em torno de um e dois tons, pode-se verificar que cada método possui seus pontos fortes e fracos. Para o método PAC e a integração do método HB com o AFM, quanto maior o número de harmônicas consideradas maior o número de incógnitas do método. Para o Transitório e o SM, quanto menor o passo de tempo, maior a quantidade de iterações necessárias para convergir em uma resposta. Portanto há sempre um método mais recomendado para cada circuito.

O objetivo da pesquisa foi explorar as linearizações em torno de um tom e ilustrar a possibilidade de linearizar circuitos em torno de mais de um tom. Pode-se concluir que, nas duas linearizações abordadas, para que os métodos atinjam a maior eficiência, o tom que sofre a linearização é limitado a receber apenas valores de pequenos sinais, enquanto os tons que integram a linearização podem receber tanto pequenos quanto grandes sinais.

Como trabalhos futuros, pretende-se investigar a linearização em torno de uma portadora modulada por uma envoltória complexa.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

REFERÊNCIAS

- L. Schuartz, E. L. Santos, B. R. B. A. Leite, A. A. Mariano and E. G. Lima, L. "Envelope Methods Applied to Simulation of Power Amplifiers with Efficiency Enhancement Techniques." In: 33rd South Microelectronics Symposium, 2018.
- S. Maas, "Nonlinear Microwave and RF Circuits", Second Edition ed. www.artechhouse.com, 2003.
- D. M. S. Moura, C. G. Natalino and E. G. Lima, "Linearização de Circuitos Eletrônicos em Torno de Regime Permanente a Zero, Um e Dois Tons", Seminários de Microeletrônica do Paraná, 2019.