

# Circuitos Equivalentes Puramente Passivos

José Eduardo da Silva, Eduardo Gonçalves de Lima  
 Group of Integrated Circuits and Systems (GICS) – Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil  
 joseduardo@ufpr.br

**Resumo**—O presente artigo tem como objetivo a obtenção de circuitos equivalentes sem o uso de fontes controladas para circuitos com  $N$ -portas estritamente passivos. A obtenção dos parâmetros  $Z$  da início fazendo-se análises no circuito original, realizando-se deduções analíticas que resultam em circuitos equivalentes afim de facilitar os cálculos até se chegar nos parâmetros desejados. Além da obtenção dos parâmetros, nos circuitos equivalentes em estrela, resultantes dessa dedução, é possível obter-se os valores das impedâncias presentes no esquemático sem conhecimento prévio dessas, realizando-se medições nas portas do circuito e fazendo o uso das equações apresentadas. Em seguida, é feito o caminho inverso do mostrado para obtenção da matriz, ou seja, a partir de uma dada matriz de impedâncias, é obtido o circuito equivalente inicial, com 6 impedâncias. Essa obtenção é realizada pelas equações analíticas até o momento em que se chega a um sistema algébrico de equações não lineares, que é preciso ser resolvido via MATLAB por método de aproximação com auxílio da função *fsolve*.

## I. INTRODUÇÃO

A simulação computacional é utilizada para investigar situações do mundo real a partir de modelos matemáticos. Na engenharia elétrica, a simulação de circuitos se dá para análise comportamental de como um circuito reage a diversas situações de maneira virtual, sem a necessidade de componentes físicos para a elaboração de protótipos, assim evitando custos, tempo para a montagem e medição de esquemáticos [1].

Circuitos equivalentes são usados para análise de circuitos de maneira simplificada, ou seja, um circuito mais simples para se obter os parâmetros desejados. Essa simplificação se dá pela possibilidade de se observar circuitos a partir de terminais e reduzir o número de equações necessárias para as medições. Um circuito equivalente deve ter sua medição igual tanto na sua forma original quanto na equivalente [2].

Mesmo partindo de esquemáticos puramente passivos, seu circuito equivalente pode conter fontes controladas, como no caso de quadripolos que em seus equivalentes há fontes controladas por corrente ou tensão [3].

Este artigo tem como objetivo o estudo de circuitos equivalentes que não se utilizam de fontes controladas, bem como o cálculo de suas impedâncias a partir dos parâmetros  $Z$  ou de medições feitas nas suas portas.

## II. CIRCUITOS EQUIVALENTES BASEADOS EM MATRIZ DE IMPEDÂNCIAS ( $Z$ )

Seja um circuito qualquer a  $n$ -portas que se deseja calcular a matriz  $Z$ . Este circuito deve obedecer a algumas restrições: deve ser linear e não pode conter fontes independentes. Dessa forma, são permitidos apenas resistores, capacitores, indutores e fontes controladas. Esses elementos permitidos são classificados em: passivos (resistores, capacitores e indutores) e ativos (fontes controladas). Ao variar do circuito original a  $n$ -portas contendo somente esses quatro elementos permitidos, variam-se apenas os valores dos  $n^2$  elementos da matriz  $Z$ .

A seguir, será feita a análise tendo como base um circuito de 3 portas, mas esta discussão se estende também para circuitos de  $n$ -portas. Na Fig. 1, tem-se o esquemático do circuito equivalente de matriz  $Z$  com 3 portas, que possui 9 parâmetros  $Z_{ij}$  [3], 6 fontes de tensão controladas por corrente e 3 impedâncias.

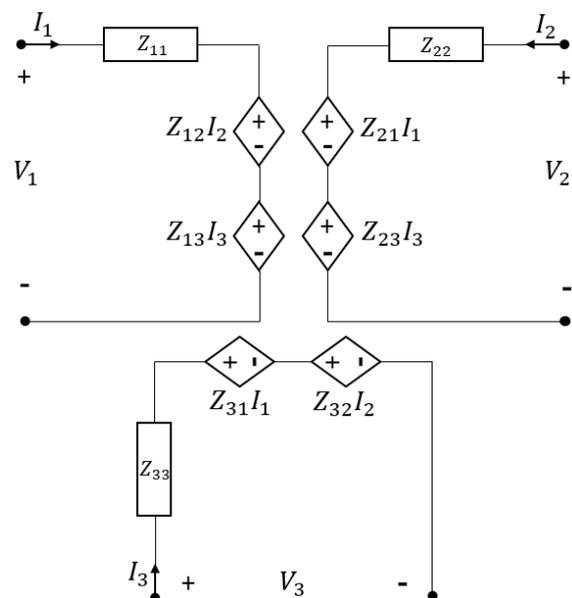


Fig. 1. Circuito equivalente de matriz  $Z$  com 3 Portas

Os nove parâmetros do circuito da Fig. 1 podem ser escritos na seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Pode-se obter os valores da matriz  $Z$  a partir do sistema  $V=ZI$ , mostrado em (1), aplicando uma fonte ideal em uma porta e deixando as outras duas portas abertas no circuito. Por exemplo, para a coluna 1, aplicando-se uma fonte ideal na porta 1 e deixando as portas 2 e 3 abertas, tem-se  $I_2=I_3=0$  e assim é possível se obter as equações para determinar os valores de  $Z_{11}$ ,  $Z_{21}$  e  $Z_{31}$ :

$$Z_{11} = V_1/I_1, \quad (2)$$

$$Z_{21} = V_2/I_1, \quad (3)$$

$$Z_{31} = V_3/I_1. \quad (4)$$

No cálculo dos valores para as colunas 2 e 3, basta repetir o processo, agora o fazendo para as portas 2 e 3. Se esse circuito original contiver apenas elementos passivos, ele é recíproco pois com a permuta entre uma fonte ideal em uma porta e um amperímetro em outra porta, esse amperímetro mostrará a mesma medição, por conseguinte sua matriz de impedâncias será simétrica, ou seja,  $Z_{ij}=Z_{ji}$  [4].

Além da matriz e do circuito equivalente de impedâncias demonstrados, também há outros circuitos equivalentes como o de admitância ( $Y$ ) e de espalhamento ( $S$ ), que possuem o mesmo número de elementos da matriz  $Z$  e também se utilizam de fontes controladas. Estão disponíveis relações analíticas que relacionam os parâmetros presentes nas matrizes  $Z$ ,  $Y$  e  $S$  [5].

### III. CIRCUITOS EQUIVALENTES PURAMENTE PASSIVOS

A discussão em sequência terá como base um circuito passivo de 3 portas, porém ela também abrange qualquer circuito de  $n$ -portas estritamente passivo.

Na Fig. 2, tem-se um circuito equivalente para 3 portas, com 6 impedâncias, 3 tensões de porta e 3 correntes de porta. Desse esquemático é possível se obter os 9 parâmetros da matriz de impedâncias ( $Z$ ).

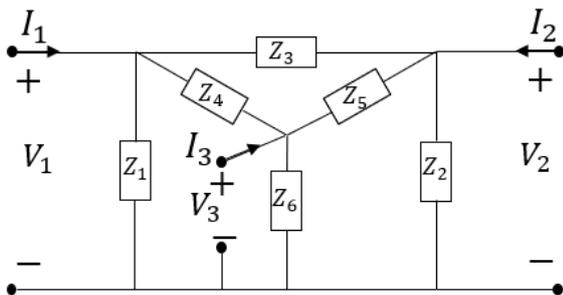


Fig. 2. Circuito equivalente puramente passivo

Partindo do circuito da Fig. 2, tem-se inicialmente 6 impedâncias e deixando as 3 portas do circuito abertas, nota-se que as impedâncias  $Z_4$ ,  $Z_5$  e  $Z_6$  formam um circuito em estrela, e aplicando-se uma transformação nesse conjunto, resulta no circuito equivalente da Fig. 3, sendo que cada nova impedância,  $Z_{AC}$ ,  $Z_{BC}$  e  $Z_{AB}$ , é resultado das equações:

$$Z_{AC} = \frac{Z_4 Z_5 + Z_6 Z_5 + Z_6 Z_4}{Z_5}, \quad (5)$$

$$Z_{BC} = \frac{Z_4 Z_5 + Z_6 Z_5 + Z_6 Z_4}{Z_4}, \quad (6)$$

$$Z_{AB} = \frac{Z_4 Z_5 + Z_6 Z_5 + Z_6 Z_4}{Z_6}. \quad (7)$$

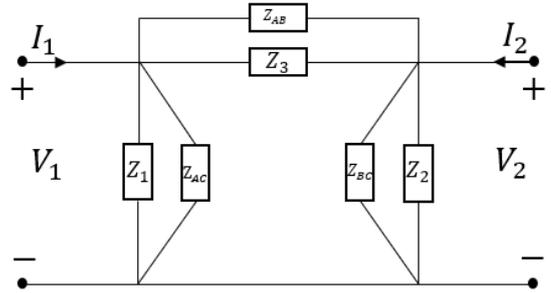


Fig. 3. Circuito após a transformação estrela para triângulo

Ainda na Fig. 3, fazendo-se a análise é possível notar que o circuito possui 3 pares de impedâncias em paralelo, onde é possível se obter as impedâncias genéricas  $Z'_1$ ,  $Z'_2$  e  $Z'_3$ :

$$Z'_1 = Z_1 // Z_{AC}, \quad (8)$$

$$Z'_2 = Z_2 // Z_{BC}, \quad (9)$$

$$Z'_3 = Z_3 // Z_{AB}. \quad (10)$$

É então possível redesenhar o circuito inicial como apresentado na Fig. 4, com 3 impedâncias.

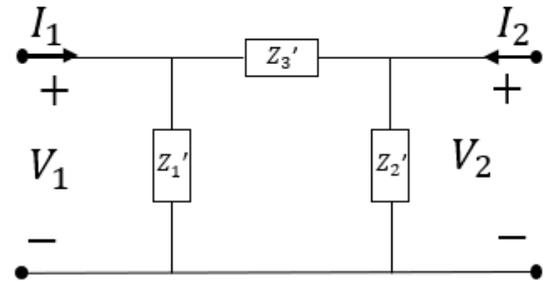


Fig. 4. Circuito após as associações em paralelo

E agora partindo do circuito da Fig. 4, ainda é possível fazer outra transformação com as impedâncias, agora de triângulo para estrela formando o circuito da Fig. 5. As impedâncias  $Z_A$ ,  $Z_B$  e  $Z_C$  do circuito são definidas pelas equações:

$$Z_A = \frac{z'_1 z'_3}{z'_1 + z'_2 + z'_3}, \quad (11)$$

$$Z_B = \frac{z_2' z_3'}{z_1' + z_2' + z_3'} \quad (12)$$

$$Z_C = \frac{z_1' z_2'}{z_1' + z_2' + z_3'} \quad (13)$$

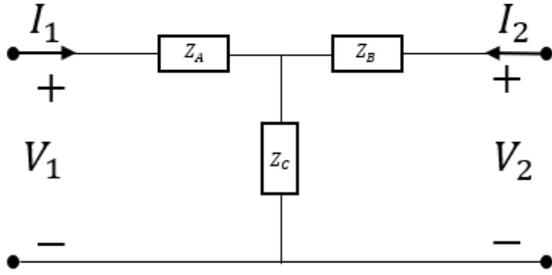


Fig. 5. Circuito equivalente em estrela

A partir do circuito da Fig. 5, é possível calcular cada uma das impedâncias a partir da matriz de impedâncias  $Z$ , que será uma matriz  $2 \times 2$ , da seguinte forma.

Primeiramente para calcular os parâmetros  $Z_{11}$  e  $Z_{21}$ , deixa-se a porta 2 aberta, onde se obtém o circuito da Fig. 6.

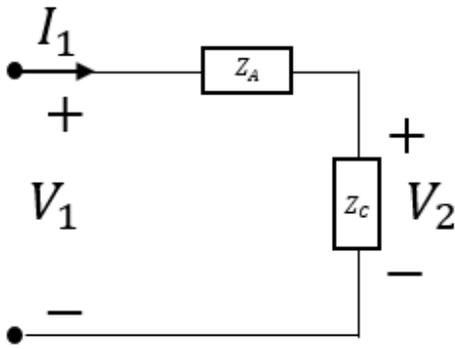


Fig. 6. Circuito equivalente em estrela com a porta 2 aberta

Como discutido anteriormente, o parâmetro  $Z_{11}$  pode ser calculado por (2), ou seja, pela impedância equivalente vista da porta 1, o que resulta na soma das impedâncias  $Z_A$  e  $Z_C$

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = Z_A + Z_C \quad (14)$$

Para  $Z_{21}$ , calcula-se por (3), sendo que a tensão  $V_2$  é a queda de tensão na impedância  $Z_C$ , logo:

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{Z_C}{Z_A + Z_C} \frac{V_1}{I_1} \quad (15)$$

como  $Z_{11} = V_1/I_1 = Z_A + Z_C$ , tem-se

$$Z_{21} = Z_C \quad (16)$$

Para os parâmetros  $Z_{22}$  e  $Z_{12}$ , o processo é análogo, mas agora tendo a porta 1 aberta. Assim, se obtém:

$$Z_{22} = Z_B + Z_C \quad (17)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_C \quad (18)$$

Substituindo o resultado de (18) em (14) e (17), é possível isolar também  $Z_A$  e  $Z_B$

$$Z_A = Z_{11} - Z_{21} \quad (19)$$

$$Z_B = Z_{22} - Z_{21} \quad (20)$$

Dessa forma, é possível deixar as 3 impedâncias do circuito da Fig. 5 em função dos elementos da matriz  $Z$ .

No caso discutido, ao fazer a transformação estrela em triângulo se eliminou o terminal positivo da porta 3, resultando no circuito da Fig. 4. Para esse mesmo circuito, ainda existem mais dois casos possíveis de transformação estrela em triângulo onde são possíveis eliminar os terminais positivos das portas 1 e 2, descritos a seguir.

Eliminando o terminal positivo da porta 2, as equações resultantes são:

$$Z_A' = Z_{11} - Z_{13} \quad (21)$$

$$Z_B' = Z_{33} - Z_{13} \quad (22)$$

$$Z_C' = Z_{13} = Z_{31} \quad (23)$$

Eliminando o terminal positivo da porta 1, as equações resultantes são:

$$Z_A'' = Z_{33} - Z_{23} \quad (24)$$

$$Z_B'' = Z_{22} - Z_{23} \quad (25)$$

$$Z_C'' = Z_{23} = Z_{32} \quad (26)$$

Além de encontrar os valores das impedâncias do circuito equivalente a partir dos parâmetros da matriz  $Z$ , também é possível encontrar seus valores a partir de medições feitas em portas. Tais medições podem ser feitas da seguinte forma.

Partindo ainda do circuito da Fig. 5, aplicando uma fonte ideal  $V_1$  na porta 1 e deixando a porta 2 aberta, chega-se no circuito da Fig. 6, onde a corrente  $I_1$  é dada por:

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_{eq}} \quad (27)$$

mas,

$$Z_{eq} = Z_A + Z_C \quad (28)$$

e

$$Z_C = \frac{V_2}{I_1} \quad (29)$$

Substituindo (29) em (28) e após essa substituição, substituir (28) em (27), tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_A + \frac{V_2}{I_1}} = Z_A I_1 + V_2 = V_1 \therefore Z_A = \frac{V_1 - V_2}{I_1} \quad (30)$$

Substituindo (30) em (28) e depois em (27), tem-se o seguinte resultado:

$$(31)$$

$$I_1 = \frac{V_1}{\frac{V_1-V_2}{I_1}+Z_C} = Z_C I_1 + V_1 - V_2 = V_1 \therefore Z_C = \frac{V_2}{I_1}.$$

Para a obtenção de  $Z_B$ , o processo é análogo ao para obtenção de  $Z_A$ , contudo, com uma fonte ideal aplicada na porta 2 e a porta 1 aberta. Assim, chega-se em:

$$Z_B = \frac{V_2-V_1}{I_2}, \quad (32)$$

$$Z_C = \frac{V_1}{I_2}. \quad (33)$$

#### IV. RESULTADOS

Seja a seguinte matriz de parâmetros  $Z$ :

$$Z = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Em (34), tem-se uma matriz simétrica e 3x3, ou seja, que corrobora com o argumento de que seu circuito de origem deve conter elementos passivos e possuir 3 portas. Logo, nessa matriz é possível aplicar as equações presentes na Seção III desse artigo para se chegar no circuito da Fig. 2.

Para isso, inicialmente, utilizam-se (17) a (26). Assim, tem-se os valores de  $Z_A=6$ ,  $Z_B=5$ ,  $Z_C=2$  para o circuito equivalente em estrela para as portas 1 e 2,  $Z'_A=5$ ,  $Z'_B=6$  e  $Z'_C=3$  para o circuito equivalente em estrela para as portas 1 e 3,  $Z''_A=5$ ,  $Z''_B=3$  e  $Z''_C=4$  para as portas 3 e 2. É possível realizar uma transformação de estrela para triângulo em cada um desses circuitos, assim, obtendo-se os valores  $Z'_1=10,4$ ,  $Z'_2=8,667$ ,  $Z'_3=26$ ,  $Z''_1=10,5$ ,  $Z''_2=12,6$ ,  $Z''_3=21$ ,  $Z'''_1=15,667$ ,  $Z'''_2=9,4$ ,  $Z'''_3=11,75$ . Com esses valores é possível escrever de (8) a (10), e também as respectivas equações citadas nessa etapa para as combinações das portas 1-3 e 2-3, resultando em:

$$10,4 = \frac{Z_1(Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6)}{Z_1Z_5+Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6}, \quad (35)$$

$$8,667 = \frac{Z_1(Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6)}{Z_1Z_5+Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6}, \quad (36)$$

$$26 = \frac{Z_1(Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6)}{Z_1Z_5+Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6}, \quad (37)$$

$$10,5 = \frac{Z_1(Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6)}{Z_1Z_5+Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6}, \quad (38)$$

$$12,6 = \frac{Z_1(Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6)}{Z_1Z_5+Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6}, \quad (39)$$

$$21 = \frac{Z_1(Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6)}{Z_1Z_5+Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6}, \quad (40)$$

$$15,667 = \frac{Z_1(Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6)}{Z_1Z_5+Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6}, \quad (41)$$

$$9,4 = \frac{Z_1(Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6)}{Z_1Z_5+Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6}, \quad (42)$$

$$11,75 = \frac{Z_1(Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6)}{Z_1Z_5+Z_4Z_5+Z_4Z_6+Z_5Z_6}. \quad (43)$$

As equações de (35) a (43) formam um sistema de equações algébricas não lineares nas incógnitas (há produtos entre  $Z_1, \dots, Z_6$ ), e não é possível obter uma solução analítica para esse sistema. Então, recorreu-se ao uso do MATLAB para a solução numérica do sistema, usando a função fsolve.

Usando como estimativa inicial  $Z_1=12$ ,  $Z_2=12$ ,  $Z_3=48$ ,  $Z_4=24$ ,  $Z_5=24$  e  $Z_6=18$ , é obtida a solução aproximada  $Z_1=11,60$ ,  $Z_2=10,48$ ,  $Z_3=54,16$ ,  $Z_4=25,00$ ,  $Z_5=12,50$  e  $Z_6=25,00$ .

Por conseguinte, substituindo-se o valor de cada impedância por sua equivalente no circuito da Fig. 2, e seguindo o processo descrito na Seção III, é possível chegar nos valores da matriz de parâmetros  $Z$  dada por (34).

#### V. CONCLUSÕES

Para o caso estudado, os resultados ocorreram de acordo com o esperado para o processo descrito no artigo, sendo possível assim, a obtenção do circuito equivalente a partir da matriz de parâmetros  $Z$  como contraprova do exposto.

Embora comumente se utilizem sempre circuitos equivalentes com fontes controladas, este trabalho apresentou uma abordagem sem o uso de fontes controladas e aplicável para circuitos passivos. A remoção das fontes controladas permite que algumas análises sejam simplificadas, por exemplo na aplicação do princípio da superposição e na obtenção de impedâncias equivalentes.

A necessidade de utilização do MATLAB para a solução do sistema algébrico de equações requer o uso de aproximações iniciais apropriadas para que o resultado venha a convergir para o ideal.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação Araucária de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Estado do Paraná no âmbito do Programa PIBIS UFPR 2020/2021 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

#### REFERÊNCIAS

- [1] L. V. Hmurcik, M. Hettinger, K. S. Gottschalck and F. C. Fitchen, "SPICE applications to an undergraduate electronics program," in IEEE Transactions on Education, vol. 33, no. 2, pp. 183-189, May 1990.
- [2] F. M. Starr, "Equivalent Circuits-I," in Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, vol. 51, no. 2, pp. 287-298, June 1932.
- [3] Alexander, C. K., Sadiku, M. (2016). Fundamentals of Electric Circuits. Reino Unido: McGraw-Hill Education.
- [4] M. Arshad, "Network Analysis and Circuits", Laxmi Publications Pvt Limited, 2010
- [5] Nilsson, J. W., Riedel, S. A. (2015). Circuitos Elétricos. Brasil: Person.