

Circuitos Equivalentes Lineares Adaptados para Análise de Transitório

Ana Paula da S. Pelegrini e Eduardo G. de Lima¹

¹Grupo de Concepção de Circuitos e Sistemas Integrados
Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil
anapaulapelegrini2503@gmail.com

Resumo— Em uma análise fasorial, ao analisar um circuito linearizado em torno da análise de corrente contínua, é comum o uso de circuitos equivalentes descritos por matrizes de parâmetros. Todavia, têm-se algumas limitações impostas pela representação fasorial. Este artigo propõe e valida um modelo equivalente linear no domínio do tempo discreto para uso em análise de transitório sendo válido para fontes independentes com quaisquer andamentos no tempo.

I. INTRODUÇÃO

No estudo de circuitos elétricos, eles podem ser classificados em circuitos lineares e não-lineares [1]-[3]. Essa característica é definida pelo comportamento das grandezas elétricas nos componentes eletrônicos, em específico se apresentam homogeneidade, aditividade e seguem uma função linear ou não. O resistor ideal é o principal exemplo de elemento linear sem derivada. O capacitor e o indutor são elementos lineares com derivada na equação. Ao analisar um circuito linear, por exemplo, um circuito linearizado em torno da análise de corrente contínua (CC) durante uma análise de pequenos sinais, é comum inicialmente substituí-lo por um circuito equivalente descrito por matrizes de parâmetros (Z , Y ou S) [4]. Esses circuitos equivalentes são descritos no domínio da frequência, utilizando a análise de corrente alternada (CA) e a representação fasorial [4]. Todavia, há uma limitação no uso deste circuito equivalente, sendo obrigatório que a fonte independente seja senoidal a frequência única, além de só resultar na resposta em regime permanente.

O objetivo desse artigo é buscar uma descrição no domínio do tempo discreto para circuitos equivalentes lineares, a fim de utilizá-los em análises de transitório contendo fontes independentes com quaisquer andamentos no tempo e obtendo a resposta completa dada pelo regime transitório mais regime permanente.

II. ANÁLISE FASORIAL

A análise fasorial é um método de análise linear no domínio da frequência destinado a circuitos com excitação senoidal. Estes são denominados circuitos CA e são caracterizados pela inversão da magnitude da corrente entre valores positivos e negativos de forma periódica no tempo. Seu comportamento senoidal pode ser descrito pela amplitude, frequência angular e fase. Nesta análise, utiliza-se o conceito de fasor das grandezas elétricas de tensão e corrente. Este é definido como um número complexo que representa a amplitude e a fase de uma senoide através da identidade de Euler, sendo invariante no tempo e em função da frequência da fonte independente [4].

Tem-se também o conceito de impedância, definida como a razão entre a tensão fasorial e a corrente fasorial resultando em um número complexo medido em ohms. Para os elementos passivos do circuito, é caracterizada pela capacidade de resistir ao fluxo de corrente quando é aplicada uma tensão. Em resistores o valor da impedância é puramente real, dependendo somente do valor da resistência, pois esse elemento faz oposição à corrente elétrica por efeito Joule. Para capacitores e indutores ela é puramente imaginária. Seu valor é composto pela frequência angular, capacitância ou indutância e componente imaginária. Nesses elementos a oposição à passagem de corrente produz campo magnético (reatância indutiva) ou campo elétrico (reatância capacitiva).

As leis de Kirchhoff são válidas para o domínio da frequência assim como no domínio do tempo. Então, para circuitos representados por fasores e impedâncias pode-se aplicar os métodos de malha ou nodal de forma similar a circuitos CC. A solução final obtida é referente somente ao regime permanente. Além disso, essa análise

só é válida se a fonte independente for senoidal a frequência única.

III. CIRCUITO EQUIVALENTE BASEADO EM IMPEDÂNCIA PARA ANÁLISE FASORIAL

Um circuito linear pode ser representado por um circuito equivalente de n portas. Um circuito de duas portas possui dois pares de terminais como ponte de acesso (entrada e saída). Nessa configuração, as portas são independentes entre si, ou seja, a corrente entra no terminal de um par e sai pelo outro terminal do mesmo par. A estrutura geral é composta por quatro variáveis de porta: V_1, V_2, I_1 e I_2 , onde V_1 e V_2 indicam tensões de porta e I_1 e I_2 indicam correntes de porta. As relações entre essas tensões e correntes são chamadas de parâmetros. O parâmetro abordado neste artigo é o de impedância Z .

O parâmetro Z é definido pela razão entre as tensões e correntes em cada terminal combinado ($Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}$) e sua unidade é ohms. Os valores do parâmetro Z podem ser calculados em duas etapas, inicialmente zerando a corrente em uma das portas (porta de saída como circuito aberto) e conectando uma fonte de tensão independente à porta de entrada, assim obtém-se Z_{11} e Z_{21} . A segunda etapa é similar, onde zera-se a corrente na porta de entrada e conecta-se uma fonte de tensão independente na saída para encontrar Z_{12} e Z_{22} [4].

Os parâmetros Z_{11} e Z_{22} são referentes à impedância de entrada e saída em circuito aberto, respectivamente. Quando eles são iguais, o circuito de duas portas é denominado como simétrico. Ademais, os parâmetros Z_{12} e Z_{21} representam a impedância de transferência. Se eles são iguais, o circuito é chamado de recíproco. Conhecidos os parâmetros, é possível utilizar o circuito equivalente genérico mostrado na Figura 1. Ele é composto por duas impedâncias e duas fontes de tensão controladas por corrente [4].

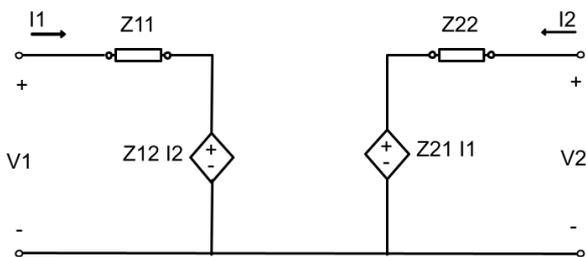


Figura 1 - Circuito equivalente genérico para análise fasorial

IV. ANÁLISE DE TRANSITÓRIO

A análise de transitório é um método de análise não-linear no domínio do tempo. Nela o tempo é discretizado, ou seja, é calculada uma solução para uma quantidade finita de N instantes de tempo. Define-se um instante inicial, tempo de amostragem e instante de

tempo final. No tempo zero, é utilizado o resultado de uma análise CC no circuito, por conta disso, essa análise tem dependência das condições iniciais dos elementos dinâmicos armazenadores de energia do circuito [5].

Para os próximos instantes de tempo o equacionamento é sistematizado semelhante às outras análises, CC e fasorial, baseado nas leis de Kirchhoff para tensões e correntes, e nos métodos convencionais como análise de malha ou nodal. Entretanto, as incógnitas usuais, tensão e corrente, nesta análise têm seus valores variando em função do tempo discreto k , onde k é um inteiro positivo relacionado com o tempo (t) através de $t = k.t_s$ sendo t_s o passo de tempo. Elementos dinâmicos, como capacitores e indutores, são discretizados no tempo por algum método de integração numérica, por exemplo o trapezoidal, substituindo as derivadas dos elementos dinâmicos por equações algébricas. Em função disso, nessas equações têm-se a dependência dos valores anteriores em $(k-1)$, cujos valores serão substituídos por números conhecidos antes da resolução do sistema em cada instante k analisado.

Além disso, ao fim dessa análise obtém-se uma resposta completa, ou seja, regime transitório mais regime permanente. Ela pode ser aplicada para circuitos com fontes independentes com quaisquer andamentos no tempo.

V. CIRCUITO EQUIVALENTE PARA ANÁLISE DE TRANSITÓRIO

O mesmo conceito de circuitos equivalentes de duas portas para análise fasorial é aplicado para o circuito equivalente para análise de transitório. Porém, para obter esse circuito equivalente é preciso considerar que o tempo é discretizado. Isso faz com que os termos dos elementos dinâmicos do circuito descritos por derivadas passem pela integração numérica trapezoidal para o processo de discretização.

Por conta disso, os termos imaginários e dependentes da frequência angular da fonte de alimentação presentes nas impedâncias dos elementos são substituídos pela derivada no tempo. Esse processo permite que esse circuito equivalente para transitório seja utilizado para qualquer fonte independente, enquanto que no fasorial é obrigatório que a fonte independente seja senoidal.

Um exemplo de circuito equivalente de duas portas, válido para circuitos de primeira ordem, é composto por 8 bipolos conforme a Figura 2. Os valores para cada um dos parâmetros dos bipolos são as partes real e imaginária da matriz de parâmetro Z para análise fasorial, entretanto somente utilizando o valor numérico de cada termo eliminando a componente imaginária. Esse modelo é composto por dois resistores, dois elementos armazenadores de energia, indutores ou capacitores dependendo do sinal da parte imaginária de Z_{11} e Z_{22} ,

quatro fontes de tensão controlada por corrente, sendo duas fontes convencionais e duas que se assemelham a elementos armazenadores de energia que, dependendo do caso, podem ser do tipo capacitivo ou indutivo.

Para os resistores, suas resistências são as partes reais de Z_{11} e Z_{22} respectivamente. Para os elementos armazenadores de energia, inicialmente verifica-se o sinal da parte imaginária de Z_{11} e Z_{22} . Se for positivo, utiliza-se um indutor cuja indutância é a parte imaginária dividida por $\omega = 2\pi f$. Se for negativo, utiliza-se um capacitor cuja capacitância é o inverso da parte imaginária multiplicada por ω . Para as fontes controladas convencionais, seus ganhos são dados pelas partes reais de Z_{12} e Z_{21} . Para as demais fontes controladas que imitam o comportamento de elementos armazenadores de energia, como indutor ou capacitor, inicialmente verifica-se o sinal da parte imaginária de Z_{12} e Z_{21} . Se for positivo, a fonte controlada tem comportamento indutivo e a sua equação diz que a tensão injetada por ela é igual ao ganho vezes a derivada primeira no tempo da corrente de controle, sendo que o ganho será a parte imaginária de Z_{12} ou Z_{21} dividido por ω , conforme: $V = \frac{\text{Im}(Z_{12} \text{ ou } Z_{21})}{\omega} \cdot \frac{dI(\text{controle})}{dt}$. Se for negativo, a fonte controlada tem comportamento capacitivo e a sua equação diz que a derivada primeira no tempo da tensão injetada por ela é igual ao ganho vezes a corrente de controle, sendo que o ganho será o inverso da parte imaginária vezes ω como pode ser visto em: $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\text{Im}(Z_{12} \text{ ou } Z_{21}) \omega} \cdot I(\text{controle})$. Destaca-se que, em geral, o circuito equivalente pode conter quaisquer combinações de dois elementos armazenadores de energia e de duas controladas com comportamentos de elementos armazenadores de energia.

Na Figura 2, tem-se apenas um exemplo de circuito equivalente onde há um indutor e uma fonte controlada com comportamento capacitivo na porta 1 e um capacitor e uma fonte controlada com comportamento indutivo na porta 2.

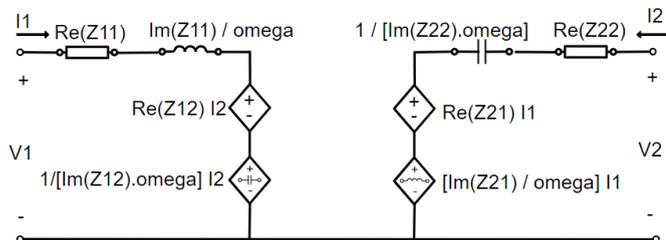


Figura 2 - Exemplo de circuito equivalente para análise de transiente

VI. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para validar os modelos equivalentes descritos, ambos foram aplicados em circuito teste a duas portas composto

por um circuito contendo um indutor (100 μH) e dois resistores (470 Ω e 100 Ω), conforme mostra a Figura 3.

Para calcular a matriz de parâmetro Z aplicou-se uma fonte senoidal de $10 \sin(\omega t)$ e frequência de 400 Hz em uma das portas e a outra foi mantida em aberto e vice-versa. Obteve-se os valores Z_{11} igual a $82,4562 + j0,1709$, Z_{12} e Z_{21} como $82,4561 - j0,0364$ e Z_{22} igual a $82,4561 + j0,0077$.

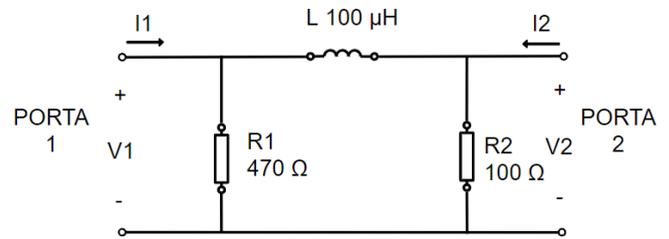


Figura 3 - Esquema do circuito teste

Esses valores foram utilizados na aplicação de ambos os circuitos equivalentes descritos nas Seções III e V. Para validar os modelos equivalentes, foi aplicada a mesma fonte senoidal citada na porta de entrada e deixada a porta de saída em aberto. Assim, foi comparada a tensão nos nós V1 e V2 e a corrente I1 proveniente da fonte independente na porta 1. Esse cenário foi aplicado no circuito teste calculado analiticamente, no circuito equivalente calculado analiticamente e com a simulação CA ou de transiente do circuito teste no software QUCS.

A Tabela 1 apresenta o comparativo entre os resultados encontrados na análise fasorial do circuito da Figura 3, a análise fasorial do circuito da Figura 1 e a simulação CA do circuito da Figura 3. Como pode ser visto, são aproximadamente iguais, validando o circuito equivalente para análise fasorial proposto pela literatura.

TABELA 1. COMPARATIVO DE SOLUÇÕES

	V1 [V]	V2 [V]	I1 [A]
Análise teórica no circuito teste	10	9,999 -j0,0251	0,1213 -j0,0003
Análise teórica no circuito equivalente	10	9,9985 -j0,0251	0,1213 -j0,0003
Simulação CA QUCS	10	10 -j0,0251	0,1213 -j0,000251

Da mesma forma, para o circuito equivalente para análise de transiente da Figura 2, temos os seguintes parâmetros: $\text{Re}(Z_{11})$ igual a $82,45e1$, $\text{Im}(Z_{11})/\omega$ como $6,79e-5$, $\text{Re}(Z_{22})$ sendo $82,45e1$, $1/[\text{Im}(Z_{22}).\omega]$ igual a $3,06e-5$, $\text{Re}(Z_{12})$ e $\text{Re}(Z_{21})$ igual a $82,45e1$, $1/[\text{Im}(Z_{12}).\omega]$ igual a $1,09e-2$ e $\text{Im}(Z_{21})/\omega$ como $1,42e-04$. Foram analisados 11 instantes de tempo, para o tempo inicial em zero, passo de 100 μs e tempo final de 1 ms. Na Figuras

4, 5 e 6 foram plotadas as curvas resultantes das tensões V_1 , V_2 e corrente I_1 referentes ao circuito teste calculado analiticamente, o circuito equivalente calculado analiticamente e a simulação de transitório do software QUCS. Na Figura 4 as três curvas plotadas apresentam exatamente os mesmos valores numéricos resultando na sobreposição do gráfico.

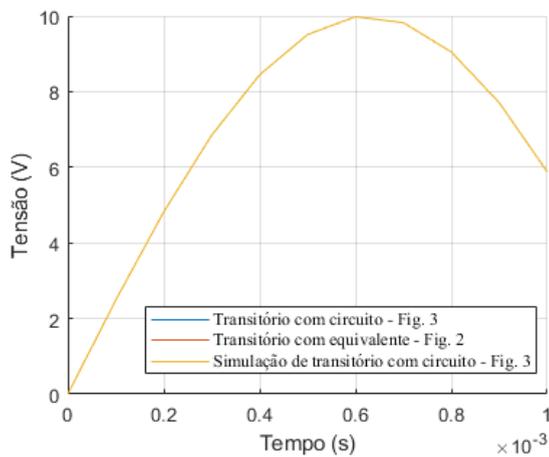


Figura 4 - Forma de onda da tensão V_1

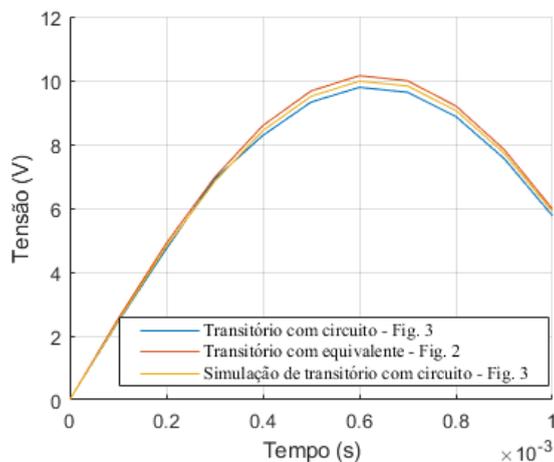


Figura 5 - Forma de onda da tensão V_2

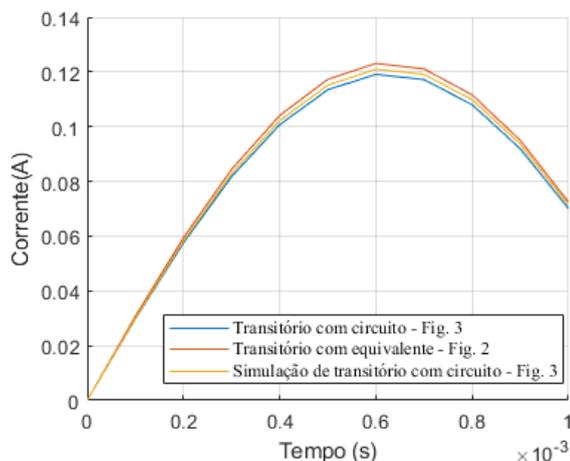


Figura 6 - Forma de onda da corrente I_1

Como pode ser observado nos gráficos, os resultados encontrados analiticamente para ambos os transitórios e para a simulação de transitório são muito próximos. Por fim, validando o uso do modelo equivalente para circuitos lineares discretizados no domínio do tempo.

VII. CONCLUSÃO

O presente trabalho propõe um circuito equivalente linear no domínio do tempo discreto para análise de transitório comparando com o circuito equivalente para análise fasorial presente na literatura, ambos baseados na matriz de parâmetro Z . Este estudo é motivado pois tradicionalmente esses circuitos equivalentes são descritos no domínio da frequência utilizando-se da notação de fasores e, por consequência, só podem ser utilizados em análise CA, limitando a fonte independente ser obrigatoriamente senoidal e de frequência única.

Concluímos que o modelo proposto é válido pois obteve-se resultados equivalentes para um circuito teste e para o circuito equivalente proposto do mesmo. Além disso, é possível aplicá-lo em circuitos contendo fontes independentes com quaisquer andamentos no tempo e obtendo a resposta completa. Entretanto, por conta da análise de transitório é exigida uma complexidade computacional, que demanda mais recursos computacionais que as análises CA. Para trabalhos futuros, pretende-se aplicar o modelo proposto para outras formas de onda como quadrada ou triangular, buscar um modelo para circuitos de ordem maior, e também, modelos baseados em outros parâmetros como admitância ou espalhamento.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e desenvolvido no âmbito do Programa PIBIC UFPR.

REFERÊNCIAS

- [1] G. D. Vendelin, A. M. Pavio, M. Rudolph, U. L. Rohde, **Microwave Circuit Design Using Linear and Non-linear Techniques**. Wiley, 2021.
- [2] MASS, S., **Non-linear Microwave and RF Circuits**, Second Edition ed. www.artechhouse.com, 2003.
- [3] XU, J. ; NUNES, L. C. ; ROOT, D. E. ; PEDRO, J. C. **Nonlinear Circuit Simulation and Modeling: Fundamentals for Microwave Design**. Cambridge University Press, 2018.
- [4] ALEXANDER, Charles; SADIKU, Matthew. **Fundamentos De Circuitos Elétricos**. 5. ed. [S. L.]: McGraw Hill, 2013.
- [5] L. W. Nagel and D. O. Pederson, **SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis)**, Memorandum No. ERL-M382, University of California, Berkeley, Apr. 1973.