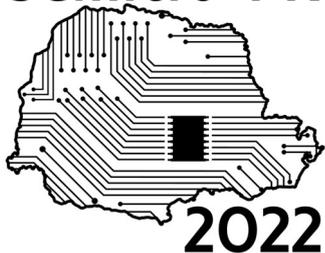


SeMicro-PR



Linearização e tratamento no domínio da frequência de circuitos com não linearidades polinomiais de terceira ordem

Leticia Cordeiro¹ e Eduardo G. Lima²

^{1,2} Group of Integrated Circuits and Systems (GICS) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil
cordeiro.leticia@outlook.com.br

Resumo—Para circuitos onde é possível considerar somente as influências das harmônicas do tom com maior amplitude, pode-se linearizar o circuito para reduzir a complexidade computacional de simulações, obtendo-se a resposta para os tons de menor amplitude por meio da análise de pequenos sinais. Essa linearização ocorre partindo dos resultados da análise de grandes sinais, que pode ser realizada pelo método Harmonic Balance (HB). A Periodic AC Analysis (PAC), realiza a análise do circuito sobrepondo os resultados da análise de grandes sinais com a resposta do circuito linearizado. O HB e o PAC tradicionalmente realizam as análises no domínio do tempo e é possível tratar não linearidades polinomiais de segunda ordem no domínio da frequência. O objetivo desse artigo foi investigar como aplicar o HB e o PAC para circuitos com não linearidades polinomiais de terceira ordem no domínio da frequência. Para o HB obteve-se menor consumo computacional e menor erro quadrático médio para o método da frequência, em comparação com o método do tempo. Já para o resultado da linearização do circuito no PAC, os métodos não apresentaram diferenças significativas para o consumo computacional e para o erro quadrático médio.

I. INTRODUÇÃO

Com o aumento da complexidade dos circuitos elétricos atualmente, exige-se que as simulações computacionais atendam de forma eficaz a análise desses circuitos na etapa de projeto. Por isso, busca-se métodos numéricos de análise e simulação que tenham complexidade computacional reduzida, para diminuir o tempo de simulação, por exemplo, e que sejam mais precisos, para diminuir os erros de simulação. Para circuitos não lineares ou que atuam com altas frequências, métodos específicos de simulação são requeridos, devido à complexidade da análise.

A análise de grandes sinais é usada para se obter a resposta em regime permanente de circuitos com fontes de tensão ou corrente independentes e periódicas no tempo atuando com n tons. A análise de Equilíbrio Harmônico, ou HB do inglês *Harmonic Balance*, realiza essa análise de

grandes sinais de forma eficiente para circuitos não lineares e tradicionalmente as não linearidades são tratadas no domínio do tempo [1]. É possível tratar não linearidades polinomiais de segunda ordem no domínio da frequência, por meio de manipulações trigonométricas para encontrar a forma analítica de $x^2(t)$, sendo $x(t)$ uma corrente ou tensão do circuito [2]. Tanto para o tratamento da não linearidade no domínio do tempo quanto para a frequência, considera-se que as fontes independentes do circuito têm amplitudes grandes o suficiente para estimular as não linearidades, sendo possível realizar a análise de grandes sinais.

Para casos onde é satisfatório considerar no circuito a influência das harmônicas do tom com maior amplitude, é possível realizar a linearização em torno de um tom, obtendo-se a resposta para os tons de menor amplitude através de uma análise de pequenos sinais, e aplicar a superposição com o resultado da análise de grandes sinais, como forma de reduzir a complexidade computacional das simulações. A Análise Periódica de Corrente Alternada, ou PAC do inglês *Periodic AC Analysis*, realiza a linearização do circuito partindo dos resultados obtidos com uma análise de grandes sinais, usando o HB, por exemplo, e tradicionalmente essa análise é feita no domínio do tempo. Não linearidades polinomiais de segunda ordem também podem ser tratadas no domínio da frequência utilizando o PAC [3].

O objetivo desse artigo é realizar a análise de circuitos com não linearidades de terceira ordem no domínio da frequência, visando expandir a ordem polinomial, visto que não linearidades polinomiais de segunda ordem podem ter suas análises de grandes e pequenos sinais realizadas tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência [2]. Será utilizado o HB para a análise de grandes sinais e o PAC para se obter a resposta do circuito considerando a influência das harmônicas do tom com maior amplitude.

II. EQUILÍBRIO HARMÔNICO

Para a análise de circuitos não lineares, o HB pode ser utilizado como um método de análise numérica para

reduzir a complexidade de simulações computacionais. Neste método de simulação, as tensões e correntes do circuito são representadas por somas de senos e cossenos multiplicados por amplitudes constantes X_{hs} e X_{hc} , respectivamente, mais uma constante X_0 [4], conforme:

$$x(t) = X_0 + \sum_{h=1}^H [X_{hs} \sin(h\omega_c t) + X_{hc} \cos(h\omega_c t)]. \quad (1)$$

Neste caso, $x(t)$ representa uma tensão ou corrente do circuito variante no tempo, H é o número de harmônicas consideradas na análise e ω_c é a frequência angular fundamental. Para o HB, cada incógnita do circuito que varia no tempo é transformada em $(2H+1)$ incógnitas constantes que representam a constante X_0 e as amplitudes de senos e cossenos. Devido a isso, cada equação do circuito também é transformada em $(2H+1)$ equações com as incógnitas constantes no tempo [4]. Uma matriz jacobiana Ω_{HB} deve ser considerada na análise de elementos dinâmicos que contenham derivadas em suas equações características, pois as derivadas neste caso devem ser tratadas no domínio da frequência [5].

Para circuitos com não linearidades polinomiais, a análise utilizando o HB pode ser feita no domínio da frequência ou no domínio do tempo.

A. Análise no domínio do tempo

O tratamento de não linearidades no domínio do tempo é feito discretizando o período fundamental em intervalos de tempo igualmente espaçados. Para o domínio do tempo, utiliza-se uma matriz F que contém os valores dos senos e cossenos que variam no tempo. Essa matriz é então multiplicada pelo vetor coluna X_{HB} que contém os valores das amplitudes constantes dos senos e cossenos e a constante X_0 . A não linearidade é avaliada em cada intervalo de tempo e então é multiplicada pelo inverso da matriz F .

B. Análise no domínio da frequência

Para o tratamento de não linearidades polinomiais e de terceira ordem no domínio da frequência, encontrou-se a forma analítica e exata de $x^3(t)$, sendo $x(t)$ uma corrente ou tensão do circuito definida em (1). O resultado é separado em um vetor coluna transposto $f(t)^T$ que contém os senos e cossenos variantes no tempo e em uma matriz Z que contém termos com as amplitudes constantes X_0 , X_{hs} e X_{hc} , como mostra a seguinte equação:

$$z(t) = x^3(t) = f(t)^T \times Z. \quad (2)$$

Para $H=2$ a matriz Z contém 56 termos que relacionam as amplitudes constantes no tempo. Desse modo, não é necessário utilizar a matriz F .

III. ANÁLISE PERIÓDICA DE CORRENTE ALTERNADA

O PAC é um método utilizado para linearizar circuitos em torno de um tom, tendo como resposta inicial resultados obtidos com uma análise de grandes sinais. Essa linearização corresponde à análise de pequenos sinais e o

resultado final do PAC é a superposição dos resultados da análise de grandes sinais com a de pequenos sinais [4]. Geralmente, a linearização ocorre derivando a equação não linear em relação à variável que será analisada [6], ou seja,

$$f_{Lin}(X) = \frac{df_{NL}(X_0)}{dX} \cdot (X - X_0). \quad (3)$$

$f_{NL}(X_0)$ é a equação não linear, $f_{Lin}(X)$ é a equação linearizada, X_0 é o resultado da análise de grandes sinais e X é a incógnita a ser analisada. A equação linearizada pode ser igualada como

$$f_{Lin}(X) = COND \times V_{SS}. \quad (4)$$

COND é a matriz de condutâncias que é obtida a partir de manipulações trigonométricas relacionando os termos de um vetor de amplitudes de condutância $g(t)$ e V_{SS} é o elemento linearizado a ser analisado em pequenos sinais [7], definido como

$$V_{SS} = \begin{bmatrix} \sin[(\omega_2 - H\omega_c)t] \\ \cos[(\omega_2 - H\omega_c)t] \\ \vdots \\ \sin[(\omega_2 - 1\omega_c)t] \\ \cos[(\omega_2 - 1\omega_c)t] \\ \sin(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_2 t) \\ \sin[(\omega_2 + 1\omega_c)t] \\ \cos[(\omega_2 + 1\omega_c)t] \\ \vdots \\ \sin[(\omega_2 + H\omega_c)t] \\ \cos[(\omega_2 + H\omega_c)t] \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} v_{k-2} \\ v_{k-1} \\ \vdots \\ v_4 \\ v_5 \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{k-4} \\ v_{k-3} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

onde ω_2 é a frequência angular da fonte de pequenos sinais e a dimensão dos vetores é $k = 2(2H+1)$.

A. Análise no domínio do tempo

Para a análise no domínio do tempo, o vetor de amplitudes de condutância é obtido utilizando as matrizes F e F^{-1} e derivando a equação não linear em relação à variável a ser analisada, ou seja,

$$g_{Tempo} = F^{-1} \left\{ \frac{d[f_{NL}(F \cdot V_{Tempo})]}{d(F \cdot V_{Tempo})} \right\}. \quad (6)$$

V_{Tempo} é o resultado da análise de grandes sinais tratando a não linearidade no domínio do tempo. Para o domínio da frequência, a maneira como o vetor de amplitudes de condutância será obtida é diferente.

B. Análise no domínio da frequência

No domínio da frequência, as matrizes F e F^{-1} não serão utilizadas. Somente as amplitudes constantes de senos e cossenos serão utilizadas para obter os elementos do vetor g_{Freq} . Para realizar o processo de linearização com o PAC no domínio da frequência para não linearidades polinomiais de terceira ordem, o g_{Freq} será obtido por

$$g_{Freq} = 3V_{Freq}^2 = 3Y. \quad (7)$$

O V_{Freq} é o resultado da análise de grandes sinais com tratamento da não linearidade no domínio da frequência. A forma exata de V_{Freq}^2 já é conhecida, pois é a matriz Y contendo os termos que relacionam as amplitudes constantes de senos e cossenos para $x^2(t)$ [2].

IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como circuito teste para as simulações, foi definida uma fonte de corrente independente e senoidal $i(t)$, um resistor R de 377Ω e um indutor saturável L , que representa o elemento não linear, como mostra a Figura 1. Para uma não linearidade de terceira ordem, a tensão no indutor V_L será definida como a derivada no tempo da corrente no indutor I_L elevada ao cubo. A tensão V_a representa uma tensão nodal, I_R é a corrente no resistor e V_r é uma tensão de referência.

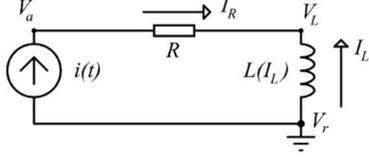


Fig. 1. Circuito teste

Utilizando a Análise Nodal Modificada (ANM) para encontrar as correntes e tensões necessárias para as análises, foi possível obter o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} I - \frac{V_a - V_L}{377} = 0 \\ \frac{V_a - V_L}{377} + I_L = 0 \\ V_L - \frac{d(I_L^3)}{dt} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Para a fonte de corrente senoidal da análise de grandes sinais, foram estabelecidas amplitudes de senos e cossenos que tornavam evidentes a presença da não linearidade nos resultados, sendo a frequência fundamental igual a 60 Hz e a defasagem angular igual a 0° , descrita como

$$i(t) = [1 \quad \sin(\omega t) \quad \cos(\omega t) \quad \sin(2\omega t) \quad \cos(2\omega t)] \times \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Como o valor da fonte de corrente $i(t)$ já teve seu valor definido, o I na primeira equação do sistema em (8) é dado pelo vetor à direita em (9). Os valores das amplitudes de $i(t)$ para a análise de grandes e pequenos sinais foram escolhidos para ilustrar nos gráficos a não linearidade de forma evidente. Na análise de pequenos sinais onde se lineariza a equação do indutor, foi considerada uma fonte de corrente independente e senoidal para estimular no circuito a segunda harmônica, tendo como frequência 120 Hz e amplitudes descritas a seguir:

$$i(t) = \begin{bmatrix} \sin(\omega_2 t - \omega t) \\ \cos(\omega_2 t - \omega t) \\ \sin(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_2 t) \\ \sin(\omega_2 t + \omega t) \\ \cos(\omega_2 t + \omega t) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,01 \\ 0,01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

As análises do artigo são válidas para não linearidades polinomiais de terceira ordem e consideraram o número de harmônicas $H = 2$ na análise não linear, como forma de simplificação, e por consequência $H = 1$ na análise linear.

A. Análise de grandes sinais

Para o circuito que contém a fonte de grandes sinais, foi realizada a simulação do HB no domínio do tempo e da frequência. Os resultados da tensão no indutor V_L para ambos os métodos estão na Figura 2 e observa-se que os resultados não coincidem. Como forma de quantificar o consumo computacional dos métodos, obteve-se o tempo de execução da rotina *fsolve*, que encontra a solução para as incógnitas do circuito definidas em (8), de 0,195 s para o método do tempo e 0,187 s para o método da frequência.

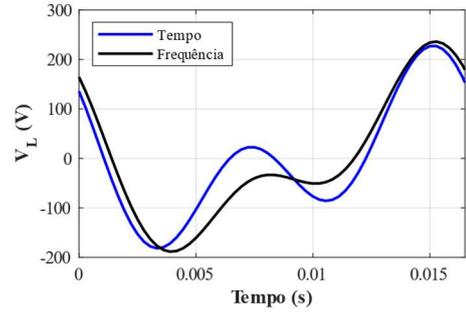


Fig. 2. Tensão no indutor para $H = 2$ utilizando o HB

Para comparar os resultados da não linearidade I_L^3 dos dois métodos, foi calculado também o valor exato, elevando ao cubo individualmente cada amostra de tempo, e o resultado é mostrado na Figura 3. O *Mean Square Error* (MSE) entre o valor exato e resultado pelo método do tempo é 0,0386 e o MSE entre o valor exato e o resultado pelo método da frequência é 0,0346. Os resultados diferem do valor exato pois há diferentes formas de aproximações. Para o método do tempo, as matrizes com os valores de senos e cossenos são utilizadas, além do tempo ser discretizado. Para o método da frequência, as harmônicas maiores que o H definidas antes da simulação são desconsiderados, então I_L^3 contém somente termos até H .

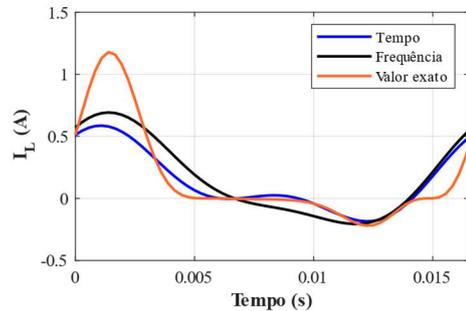


Fig. 3. Corrente I_L^3 no indutor para $H = 2$ utilizando o HB

B. Análise de pequenos sinais

Para o circuito contendo a fonte de pequenos sinais, foi realizada a linearização utilizando o método da frequência, com 0,17615 s de execução do *fsolve*, e o método do tempo,

com 0,17609 s. O resultado está na Figura 4 e o *Normalized Mean Square Error* (NMSE) entre as curvas é de 0,0067.

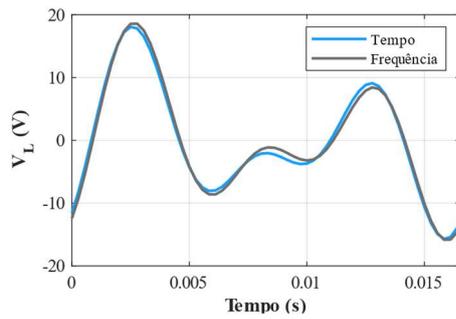


Fig. 4. Tensão V_L linearizada

C. PAC e HB de 2 tons

Para obter o resultado final do PAC, realizou-se a superposição dos resultados de V_L obtidos com a análise de grandes sinais e a análise de pequenos sinais, representado na Figura 5 para o método do tempo. Como forma de avaliar a precisão do PAC, também foi realizada uma simulação do HB com 2 tons. Ou seja, ao invés de realizar as análises de grandes e pequenos sinais separadamente, linearizando o circuito na análise de pequenos sinais, realizou-se o HB com as fontes de grandes e pequenos sinais no mesmo circuito, permanecendo com a equação não linear. O resultado do HB com 2 tons para o método do tempo também está na Figura 5. O NMSE entre as curvas é de 0,0138.

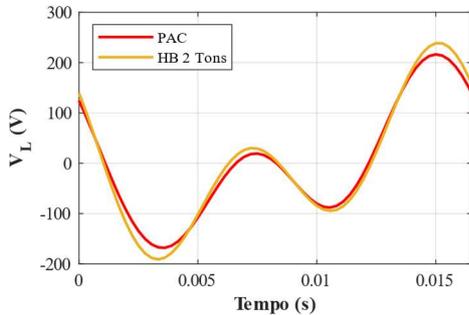


Fig. 5. PAC e HB de 2 tons para o método do tempo

Para o método da frequência também foi obtido o resultado final do PAC para V_L e realizado o HB de 2 tons, ambos representados na Figura 6. O NMSE entre as curvas é de 0,0075.

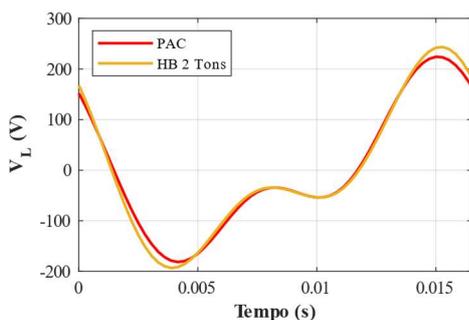


Fig. 6. PAC e HB de 2 tons para o método da frequência

V. CONCLUSÃO

Esse artigo investigou como analisar e simular no domínio da frequência um circuito com não linearidade polinomial de terceira ordem utilizando o HB e como linearizá-lo com o PAC, considerando duas harmônicas. O HB na frequência foi realizado obtendo uma matriz que relaciona de forma linear as amplitudes de senos e cossenos mais uma constante, proveniente da forma analítica e exata do cálculo da não linearidade cúbica. Considerando o HB na análise de grandes sinais, o método da frequência obteve menor MSE em relação ao cálculo exato e menor consumo computacional, se comparado com o método do tempo. A linearização no domínio da frequência ocorreu mudando a forma que os valores do vetor de amplitudes de condutância foram obtidos e os resultados do método do tempo e da frequência são parecidos, além de não apresentarem diferença significativa no consumo computacional. Comparando para ambos os métodos o resultado final do PAC com o HB de dois tons, que apresentava a fonte de pequenos e grandes sinais no mesmo circuito, o método da frequência obteve o menor NMSE.

AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por tornar possível a realização da pesquisa pelo programa PIBITI UFPR 2021.

REFERÊNCIAS

- [1] VENDELIN, G. D. ; PAVIO, A. M. ; RUDOLPH, M. ; ROHDE, U. L. Microwave Circuit Design Using Linear and Nonlinear Techniques. Wiley, 2021.
- [2] CORDEIRO, L.; LIMA, E. G. . Análise de equilíbrio harmônico com não linearidades polinomiais descritas no domínio da frequência. In: Seminários de Microeletrônica do Paraná, 2021, Curitiba. Anais do SeMicro-PR, 2021. v. 4.
- [3] CORDEIRO, L.; LIMA, E. G. . Linearization of Circuits with Polynomial Nonlinearities Described in the Frequency Domain. In: XXII Microelectronics Students Forum, 2022. Proceedings of the XXII Microelectronics Students Forum, 2022.
- [4] STEER, M. Microwave and RF Design: A Systems Approach. 2nd Edition. SciTech Publishing, 2013.
- [5] NATALINO, C. G. ; ARAUJO, M. A. C. ; LIMA, E. G. Time and Frequency Domain Numerical Analyses for Electrical Circuits under Fixed Large Signal Stimulus and Variable Small Signal Sources. In: 19º Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e o 14º Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, 2020, Niterói. Anais da MOMAG 2020, p. 649-653.
- [6] ARAUJO, M. A. C. ; MOURA, D. M. S. ; LIMA, E. G. Time and Frequency Domain Two-tone Simulation based on Periodic Steady State Linearization. In: 20th Microelectronics Student Forum, 2020.
- [7] MOURA, D. M. S. ; NATALINO, C. G. ; LIMA, E. G. Linearização de Circuitos Eletrônicos em Torno de Regime Permanente a Zero, Um e Dois Tons. In: Seminários de Microeletrônica do Paraná, 2019, Curitiba. Anais do SeMicro-PR, 2019.