

Identificação Aprimorada de Série de Volterra de Duas Entradas e Uma Saída com Imposição de Pequenos Sinais em Uma Entrada Baseada em Expansão de Taylor

Daniele Richartz¹, Eduardo Gonçalves de Lima

¹ UFPR, Curitiba, Brasil

danirichartz@gmail.com

Resumo — Um dos modelos matemáticos mais comumente usados para representar sistemas não lineares com memória é a série de Volterra, que tem como objetivo modelar circuitos elétricos não lineares. A série de Volterra com duas entradas e uma saída pode ser extraída de duas maneiras diferentes em relação a uma das entradas como um pequeno sinal: uma aplicando a teoria de pequenos sinais diretamente em uma série de Volterra com duas entradas, e a outra utiliza uma série de Taylor expandida em torno da entrada de pequeno sinal truncada na primeira ordem. Num primeiro estudo, os coeficientes do modelo da série de Volterra que utiliza a série de Taylor truncada em primeira ordem foram extraídos considerando apenas uma das entradas, o que não gerou resultados tão satisfatórios em relação ao Erro Quadrático Médio (MSE), porém é o modelo que possui menor complexidade. Neste trabalho este modelo é tratado como um caso particular do modelo de pequenos sinais, assim os coeficientes do modelo que usa a série de Taylor foram extraídos considerando as duas entradas da série de Volterra. A partir dessa abordagem o MSE diminui de $3,5188 \times 10^{-05}$ para $8,0881 \times 10^{-06}$.

I. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática é uma ferramenta amplamente utilizada em diversos campos do conhecimento [1]. Ela permite a descrição de eventos específicos por meio de recursos matemáticos e físicos. Neste contexto, a série de Volterra se destaca como um modelo matemático não linear com memória que serve para representar circuitos elétricos não lineares, como por exemplo circuitos de um amplificador de potência (PA).

Neste estudo, nos concentramos na análise da série de Volterra com duas entradas e uma saída especialmente quando uma das entradas representa um sinal pequeno. Foi estudado dois métodos de obter o modelo considerando essas condições: o primeiro método envolve a aplicação direta da teoria de pequenos sinais em uma série de Volterra de duas entradas, que, de acordo com [2], oferece níveis satisfatórios de precisão. Já o segundo método, foco

central desta pesquisa, consiste na expansão de uma série de Volterra com uma entrada por meio de uma série de Taylor de primeira ordem. Num primeiro momento esse modelo foi extraído considerando apenas uma das entradas, o que gerou um MSE alto [3].

A análise da complexidade é feita comparando o número de coeficientes que cada modelo possui e para verificar o quão preciso cada modelo é, usa-se o MSE.

II. MODELAGEM MATEMÁTICA COM SÉRIE DE VOLTERRA

A modelagem matemática tem como objetivo descrever diversos fenômenos por meio de técnicas matemáticas. Um desses modelos é a série de Volterra, que é utilizada para descrever sistemas não lineares com memória [4]. Um sistema com memória implica que a saída atual é influenciada por estados anteriores [5].

A série de Volterra com duas entradas e uma saída oferece maior precisão quando comparada à série de Volterra com uma entrada e uma saída. No entanto, a primeira abordagem é mais complexa [6]. Assim, o objetivo de estudar estratégias diferentes para obter a série de Volterra com duas entradas, é visando a redução da complexidade.

A primeira estratégia envolve a aplicação da teoria de pequenos sinais, quando um sinal de pequena amplitude está presente em uma das entradas. Esta abordagem tem se mostrado eficaz e produz resultados satisfatórios. A outra estratégia consiste em utilizar uma série de Taylor truncada de primeira ordem. Num primeiro momento esse modelo foi manipulado de forma a não exigir a saída da série de Volterra com duas entradas para obter os coeficientes. Em vez disso, os coeficientes usados foram os mesmos da série de Volterra com uma entrada e uma saída, o que impacta na precisão do modelo, pois por mais que o modelo simule uma equação com duas entradas, esta abordagem, para extração dos coeficientes, foi feita considerando apenas os

parâmetros da série de Volterra com uma entrada [3]. É possível perceber que a série de Volterra que utiliza a série de Taylor para extração de seus coeficientes, é um caso particular do modelo que utiliza pequenos sinais. Uma alternativa para melhorar a precisão do modelo é extrair-lo de forma mais eficiente considerando as duas entradas, o que possivelmente irá gerar resultados mais precisos com o mesmo número de coeficientes.

Apesar da série de Volterra ser um modelo não linear, seus coeficientes se relacionam de forma linear. Essa propriedade nos permite extrair esses coeficientes de forma eficiente por meio do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Os coeficientes obtidos com o MMQ são, então, empregados na equação da série de Volterra. Para avaliar a precisão do modelo, utilizamos o MSE. O MSE mede a média das diferenças quadráticas entre os valores previstos e os valores reais correspondentes. Quanto menor o valor do MSE, mais próximo o resultado está dos valores esperados, refletindo um maior de precisão. A comparação dos valores do MSE obtidos a partir de diferentes modelos nos permite avaliar seu desempenho e identificar o modelo que melhor se ajusta aos dados.

III. DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS BASEADOS NA SÉRIE DE VOLTERRA

A equação da série de Volterra com uma entrada e uma saída é dada por

$$y(n) = f[x(n), \dots, x(n - M)] = \sum_{p=1}^{P_0} \sum_{q_2=q_1}^M \dots \sum_{q_p=q_{p-1}}^M C_{p(q_1, q_2, \dots, q_p)} \prod_{j=1}^p x(n - q_j) \quad (1)$$

Nesta equação $y(n)$, representa a saída no instante de tempo n , P_0 denota a ordem do polinômio, M representa o tamanho da memória, $C_{p(q_1, q_2, \dots, q_p)}$ corresponde aos coeficientes e $x(n - q_j)$ representa a entrada no instante n ou instantes passados. Neste trabalho, a ordem do polinômio foi fixada em 3 e o tamanho de memória máximo é definido como 1, o que nos requer extrair 9 coeficientes. Esta equação foi utilizada para formular a equação da série de Volterra com uma entrada e uma saída expandida como uma série de Taylor truncada de primeira ordem, dada por:

$$y(n) = f[x(n), x(n - 1)]|_{x(n)=x_0(n), x(n-1)=x_0(n-1)} + \frac{\partial f[x(n), x(n - 1)]}{\partial x(n)}|_{x(n)=x_0(n), x(n-1)=x_0(n-1)} [x(n) - x_0(n)] + \frac{\partial f[x(n), x(n - 1)]}{\partial x(n)}|_{x(n)=x_0(n), x(n-1)=x_0(n-1)} [x(n - 1) - x_0(n - 1)] \quad (2)$$

onde $f[x(n), x(n - 1)]$ corresponde a (1), e $x_0(n)$ e $x_0(n - 1)$ representam a entrada de grande sinal em um sistema que contém duas entradas. Tendo isso em mente,

em (2), as diferenças $[x(n) - x_0(n)]$ e $[x(n - 1) - x_0(n - 1)]$ representam a segunda entrada de uma série de Volterra com duas entradas. Assim, $y(n)$ modela um sistema não linear com duas entradas, fornecendo a saída de uma série de Volterra de duas entradas e uma saída. Os coeficientes do modelo de (2) são exatamente os mesmos que os coeficientes do modelo de (1). Neste trabalho esta mesma equação é utilizada, entretanto o que muda é a abordagem em relação aos coeficientes. Agora os coeficientes são extraídos considerando as duas entradas e a saída da série de Volterra com duas entradas e uma saída. Neste modelo em ambas as abordagens a ordem polinomial é 3 e o tamanho de memória é definido como 1, o que nos requer extrair 9 coeficientes.

IV. RESULTADOS E DICUSSÃO

Para implementar os modelos, plotar formas de onda, manipular sistemas algébricos e realizar todos os cálculos, foi utilizado o MATLAB. Os dados de entrada e saída a serem aplicados ao modelo fornecido por (1) foram obtidos usando o circuito mostrado na Figura 2. Neste circuito, a saída foi medida através de um resistor de 10Ω , enquanto a entrada foi fornecida pela fonte V_{in} com frequência de 1 kHz.

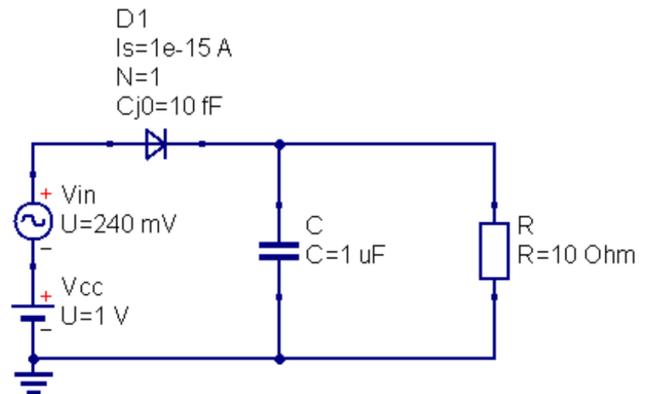


Figura 01: Circuito usado para obter os dados da série de Volterra com uma entrada e uma saída.

Para extrair os dados a serem aplicados no modelo que considera a série de Volterra com duas entradas e uma saída foi utilizado o circuito representado na Figura 2. Neste circuito, as entradas foram provenientes de V_{in1} e V_{in2} , respectivamente. Da mesma forma, a saída foi medida através do mesmo resistor de 10Ω .

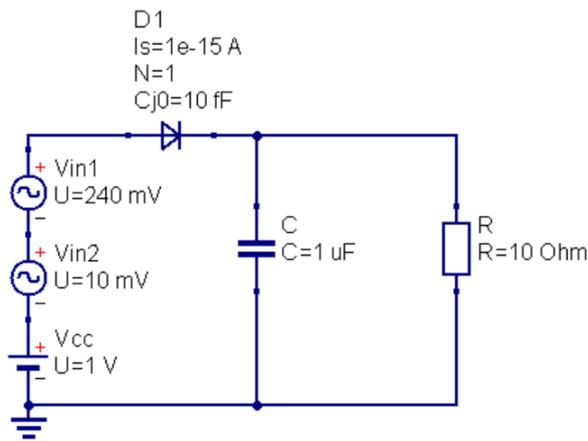


Figura 2: Circuito para obter dados da série de Volterra com duas entradas e uma saída

Ao utilizar essas configurações de circuito, os dados desejados foram coletados e utilizados para implementar os dois modelos. A Figura 3 representa o modelo que usa a série de Taylor considerando apenas uma entrada e a Figura 4 representa este mesmo modelo, só que agora extraíndo os coeficientes considerando as duas entradas. Essas figuras comparam a saída estimada com a saída desejada.

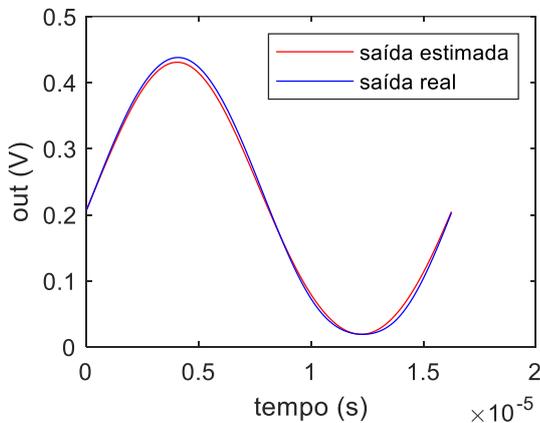


Figura 3: Modelo da série de Volterra usando Taylor considerando apenas uma entrada.

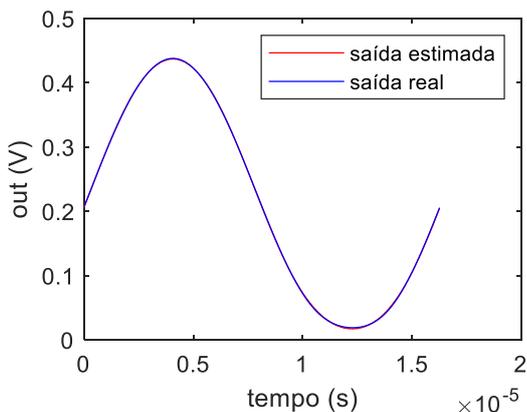


Figura 4: Modelo da série de Volterra usando Taylor considerando as duas entradas.

Para obter uma análise mais precisa, o Erro Quadrático Médio (MSE) foi calculado para cada modelo, e os valores estão apresentados na Tabela 1, sendo os seguintes modelos:

- I- Série de Volterra com uma entrada e uma saída;
- II- Série de Volterra com duas entradas e uma saída;
- III- Série de Volterra considerando a teoria de pequenos sinais;
- IV- Série de Taylor truncada em primeira ordem com os coeficientes extraídos considerando apenas uma das entradas;
- V- Série de Taylor truncada em primeira ordem com os coeficientes extraídos considerando as duas entradas;

TABELA 1. MSE DE CADA MODELO

Modelo	MSE	Nº de coeficientes
I	7,8526e-10	9
II	8,0823e-07	33
III	5,4360e-07	20
IV	3,5188e-05	9
V	8,0881e-06	9

V. CONCLUSÃO

A série de Taylor truncada em primeira ordem, quando aplicada à série de Volterra, atinge o objetivo de diminuir significativamente a complexidade do modelo. Além disso, quando os seus coeficientes são extraídos considerando as duas entradas, a sua precisão é elevada, superando os outros modelos. Porém, este modelo não abrange todas as aplicações, apenas aquelas em que um dos sinais a ser modelado é significativamente menor que o outro.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o apoio financeiro fornecido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por meio do Programa PIBIC AF UFPR 2022.

REFERÊNCIAS

- [1] L. Ljung, System Identification: Theory for the User. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1999.
- [2] D. Richartz, E. G. Lima, "Behavioral Modeling Using Volterra Series with Imposition of Small Signals in One Input", Simposio Sul de Microeletrônica (SIM).
- [3] D. Richartz, E. G. Lima, "Linearization of Volterra series based on first order Taylor series expansion". Proceedings of the XXIII Microelectronics Students Forum, 2023.
- [4] WEI, Ziran; LIU, Zhiwen; HE, Fawei. Reduced-Order Model Based on Volterra Series for Aerodynamics of the Bridge Deck Section and Flutter Critical Wind Speed Prediction. Applied Sciences, v. 13, n. 6, p. 3486, 2023.
- [5] DRAXLER, Paul J. et al. Rational generalized memory polynomial for efficient predistortion of wideband envelope tracking amplifiers. In: 2023 IEEE Radio and Wireless Symposium (RWS). 2023.

[6] D. Richartz, A. P. S. Pelegrini, E. G. Lima, "Comparação entre séries de Volterra de uma e duas entradas aplicadas na

modelagem de circuito amplificador", Seminários de Microeletrônica do Paraná (SeMicro-PR)