

# Caracterização linear no domínio da frequência de um elemento de circuito com comportamento de memristor

Emeli Naisa Krebs<sup>1</sup>, Eduardo Gonçalves de Lima

<sup>1</sup> UFPR, Curitiba, Brasil  
emelikrebs@ufpr.br

*Resumo- Este estudo explora uma vantagem pouco conhecida das análises no domínio da frequência, que é a capacidade de caracterizar linearmente elementos não lineares no domínio do tempo. Nesse estudo, isso é alcançado introduzindo um elemento fictício, que modifica os valores das harmônicas de sua corrente, em um circuito com componentes e valores arbitrários. Através de testes que realizam uma análise harmônica linear, é revelado um comportamento semelhante ao de um memristor. Embora uma implementação física desse elemento fictício não exista, essa abordagem tem o potencial de estimular pesquisas sobre caracterizações lineares no domínio da frequência do memristor, um componente de circuito cada vez mais importante devido às suas aplicações em redes neurais analógicas de alto desempenho.*

## I. INTRODUÇÃO

A análise de circuitos elétricos desempenha um papel fundamental na engenharia elétrica e eletrônica, sendo a base para o projeto, manutenção e otimização de sistemas elétricos complexos [1]. Essa análise visa, principalmente, obter informações cruciais sobre as tensões e correntes em um circuito, permitindo uma compreensão profunda do comportamento dos elementos que o compõem. Para alcançar esse objetivo, diversos métodos de equacionamento são empregados, sendo os métodos nodal e de malhas amplamente utilizados [2]. Esses métodos se baseiam nas leis de Kirchhoff e nas equações características dos elementos, que estabelecem as relações entre tensão e corrente em cada componente.

As equações características desempenham um papel fundamental na classificação dos elementos do circuito. Dependendo de como as tensões e correntes se relacionam nessas equações, os elementos podem ser categorizados em quatro principais grupos: lineares estáticos (como resistores e fontes ideais), lineares dinâmicos (incluindo capacitores e indutores), não lineares estáticos (ex.: diodos ideais) e não lineares dinâmicos (capacitores não lineares). Essa classificação é essencial para determinar o comportamento e as respostas dos circuitos.

Embora a análise de transitório seja a mais abrangente, permitindo a obtenção da resposta completa do circuito, em alguns casos específicos, é desejável estimular o circuito com senoides de frequência única e analisar apenas o regime permanente [3]. Nesses cenários, análises no domínio da frequência, como a análise fasorial e o equilíbrio harmônico (HB), se destacam por proporcionar uma análise mais eficiente em termos computacionais. Além disso, essas análises oferecem uma caracterização natural de elementos com atrasos, como linhas de transmissão, simplificando a análise em determinados contextos.

Este trabalho busca investigar uma vantagem pouco divulgada, que se refere à caracterização linear no domínio da frequência de elementos não lineares presentes no domínio do tempo. Para alcançar esse objetivo, apresentaremos uma revisão detalhada das análises de transitório e do HB na Seção II e III, respectivamente. Em seguida, na Seção IV, apresentaremos um estudo de caso que ilustrará como essa abordagem pode ser aplicada na prática. Finalmente, na Seção V, discutiremos as conclusões e as percepções obtidas a partir desta pesquisa.

## II. ANÁLISE DE CIRCUITOS TRANSITÓRIOS

A análise de circuitos transitórios permite a compreensão do comportamento dinâmico dos sistemas elétricos ao longo do tempo. Esta seção explora como a análise de circuitos transitórios é realizada, destacando o processo e as equações fundamentais envolvidas.

Nesse tipo de análise, buscamos obter tanto a resposta transitória quanto a resposta em regime permanente de um circuito que contenha elementos armazenadores de energia, como capacitores e indutores. O desafio aqui é que a resposta depende das condições iniciais do circuito e muda a cada momento de tempo, envolvendo incógnitas dependentes de valores anteriores. Para realizar essa análise, discretizamos o tempo, definindo valores iniciais, intervalos de amostragem e momentos finais ou o número total de instantes de tempo. Também são utilizadas as leis

de Kirchoff e as equações características dos elementos, que relacionam tensões e correntes.

Essas leis são aplicadas aos nós e malhas do circuito, e as tensões e correntes são expressas em função do tempo, considerando as características dos elementos envolvidos. Para elementos lineares, essas equações resultam em sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de ordem  $n$ .

Para lidar com derivadas de elementos dinâmicos, como capacitores, empregamos métodos de integração numérica, como o método de Euler ou a integração trapezoidal, esse último, tendo como foco a discretização no tempo [4]. Essa integração trapezoidal envolve uma equação que leva em consideração o instante atual ( $t_i$ ) e o instante anterior ( $t_{i-1}$ ), permitindo calcular a corrente em cada iteração. Inicialmente, para o primeiro ciclo, os valores de tensão do regime contínuo são usados, e a corrente inicial nos capacitores é definida como zero, pois, nesse ponto, o capacitor age como um circuito aberto, sem variação de tensão no circuito.

Dessa forma, a análise de circuito transitório é realizada por meio de uma série de iterações, atualizando os valores das incógnitas a cada instante de tempo. Esses valores fornecem a resposta completa do circuito após um intervalo de tempo ou um número específico de iterações. Essa técnica é essencial para entender como os circuitos elétricos se comportam em situações dinâmicas, permitindo a análise de diversos fenômenos, desde a resposta a surtos elétricos até o comportamento de circuitos em regimes transitórios complexos.

Essa análise é essencial para o entendimento de fenômenos transitórios em sistemas elétricos, como a resposta de circuitos a surtos elétricos, a estabilização de sistemas após o ligamento de cargas, e muitas outras situações práticas.

### III. ANÁLISE EM EQUILÍBRIO HARMÔNICO

A análise em HB é uma técnica que visa resolver circuitos não-lineares sob a influência de grandes sinais senoidais. O principal objetivo da HB é transformar as equações no domínio do tempo, obtidas por métodos de equacionamento como a Análise Nodal Modificada (ANM) [6], em um conjunto de equações independentes no domínio da frequência. Isso é realizado assumindo que a resposta em regime permanente de um circuito não-linear alimentado por um sinal senoidal pode ser representada por um vetor de valores correspondentes a amplitudes de componentes senoidais, cossenoidais e do valor constante.

Para realizar a análise em HB, cada incógnita que varia com o tempo é substituída por um conjunto de  $(2H+1)$  incógnitas constantes, onde uma representa o valor médio e as outras são amplitudes de senos ou cossenos para cada harmônica considerada até o truncamento  $H$ . Portanto, cada equação obtida pela ANM no domínio do tempo é transformada em  $(2H+1)$  equações algébricas

independentes no domínio da frequência. Isso é obtido através da equação abaixo:

$$x_A(t) = X_A + \sum_{h=1}^H X_{ash} \text{sen}(h\omega_c t) + X_{ach} \text{cos}(h\omega_c t) \quad (1)$$

Onde  $x_A(t)$  indica uma tensão ou corrente qualquer. A criação de uma matriz omega para elementos dinâmicos, como capacitores e indutores, é realizada para transformar a derivada da equação característica desses elementos no domínio da frequência. Isso resulta em um único sistema não-linear no domínio da frequência a ser resolvido, onde o tamanho e o processamento dependem apenas do número de harmônicas consideradas na simulação. Por exemplo, para uma simulação com  $H=2$ , a equação Omega fica como abaixo:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_c & 0 & 0 \\ 0 & \omega_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\omega_c \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega_c & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Essa abordagem de equilíbrio harmônico é essencial para analisar o comportamento de circuitos elétricos sob excitações discretas na frequência, permitindo a compreensão detalhada de como diferentes componentes do circuito respondem a harmônicas específicas. É especialmente útil em aplicações de alta frequência, onde a análise transitória pode se tornar computacionalmente intensiva.

### IV. ESTUDO DE CASO

Neste estudo de caso, é apresentado um circuito teste que ilustra a aplicação do HB em conjunto com o método de equacionamento ANM. Para a definição desse circuito, foram definidos os componentes de forma arbitrária, assim como seus valores, seguindo apenas a necessidade de possuir um elemento armazenador de energia, nesse caso o capacitor, e incluindo o novo elemento.

O novo componente foi caracterizado por meio de uma expressão de domínio da frequência, conforme:

$$\begin{bmatrix} I_{ne} \\ I_{neS1} \\ I_{neC1} \\ I_{neS2} \\ I_{neC2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_{ne} \\ V_{neS1} \\ V_{neC1} \\ V_{neS2} \\ V_{neC2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Onde  $i_{ne}$  e  $v_{ne}$  indicam a corrente e a tensão sobre o novo elemento, respectivamente. Como mostrado na Equação 3, o objetivo de incluir esse novo componente era zerar a sua componente contínua da corrente, além de converter valores da segunda harmônica da sua corrente em valores da primeira harmônica e assim por diante.

Essa equação não foi desenvolvida com a intenção direta de simular um resultado semelhante a um memristor, inicialmente, foram assim definidas apenas para entender como essa mudança de harmônicas na corrente de um

elemento afetaria os resultados do circuito como um todo e os gráficos desse próprio componente novo.

O circuito, conforme representado na Figura 1, é constituído por dois resistores, R2 e R3, com valores de resistência de 2 Ω e 3 Ω, respectivamente, e um capacitor de capacitância igual a 4 F. Este circuito é alimentado por uma fonte senoidal de magnitude  $u(t) = 10\text{sen}(6t)$ . É importante notar que o componente adicional é indicado por um retângulo no esquemático.

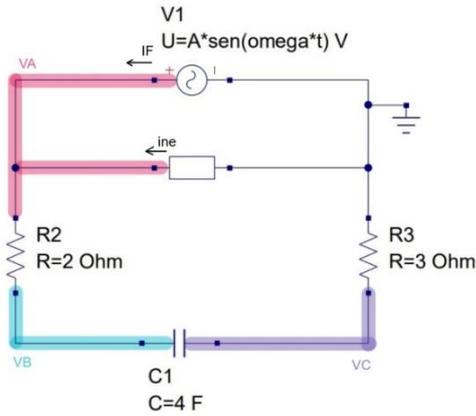


Fig. 1. Circuito de estudo de caso.

Na análise deste circuito, inicialmente procedeu-se à aplicação do método de ANM, levando em consideração as tensões nodais do circuito. Esse procedimento resultou em um conjunto de equações relacionando as três tensões nodais e a corrente da fonte ( $i_f$ ). Posteriormente, implementou-se a análise em HB, na qual cada variável foi representada por sua matriz correspondente, conforme definido na Equação 1. Além disso, na análise do componente capacitivo, utilizou-se a matriz Omega para substituir a derivada presente na equação de sua corrente.

Em seguida, incorporamos esse componente ao circuito, seguindo as regras fundamentais das Leis de Kirchhoff. Isso resultou na adição da equação de corrente desse novo elemento às equações gerais do circuito.

Dessa maneira, fixando  $H = 2$  foi possível estabelecer um sistema de equações lineares de dimensão 12x12 que representava o circuito em questão. Através dessas simulações, foi possível extrair diversos gráficos para análise e interpretação dos resultados obtidos. Importante ressaltar que, no circuito utilizado, que é inteiramente linear, exceto elemento fictício, aumentar o H não mudaria o resultado do circuito, porém poderia modificar o comportamento do novo componente.

Na Figura 2, estão explicitados os valores ao longo do tempo das variáveis levantadas na ANM, que são: tensão no nó A, tensão no nó B, tensão no nó C e corrente da fonte. Além disso, no último gráfico está representada a corrente do novo elemento, que assim como já foi comentado, mesmo que todos os elementos passivos percebam uma tensão e corrente com a presença de uma segunda harmônica, isso não acontece na corrente do novo

elemento, pois esse era justamente o objetivo do novo elemento.

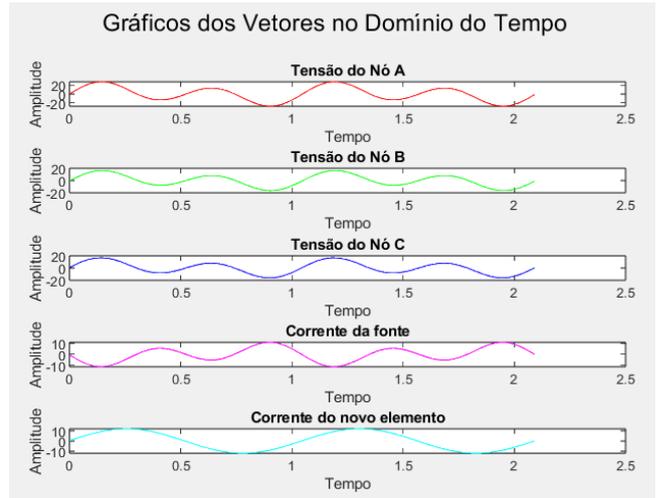


Fig. 2. Gráficos dos vetores no domínio do tempo.

Primeiro, a questão de validação da análise HB, podemos verificar que os componentes como resistor e capacitor chegaram em resultados comumente esperados. Como, por exemplo, na Figura 3, percebe-se que a tensão e corrente do resistor ao longo do tempo, possuem o mesmo formato de onda, mudando apenas as amplitudes dos picos, e na Figura 4, o gráfico de corrente x tensão desse componente é uma reta, validando a Lei de Ohm.

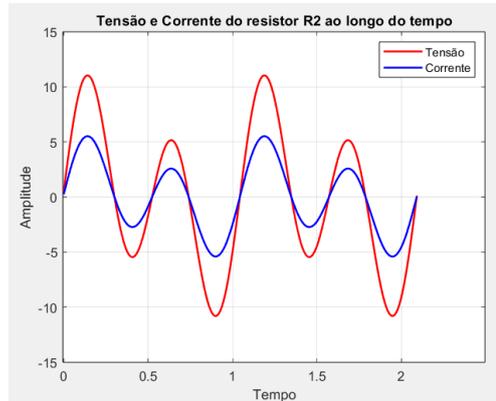


Fig. 3. Gráfico de tensão e corrente ao longo do tempo do resistor R2.

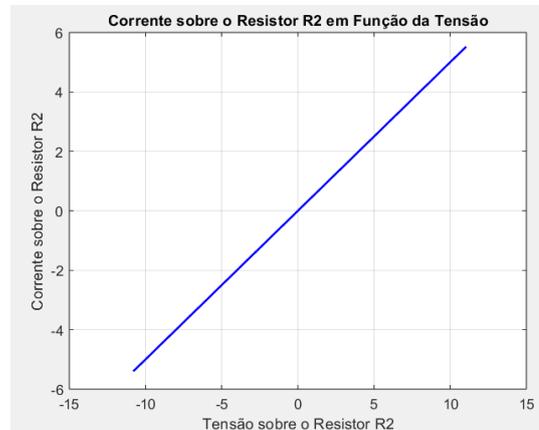


Fig. 4. Gráfico de tensão x corrente do resistor R2.

Assim como no resistor, o capacitor obteve os resultados esperados em seus gráficos de tensão e corrente ao longo do tempo, como pode ser visto na Figura 5. Assim como a Figura 6 mostra a coerência da saída desejada de tensão x corrente de um capacitor.

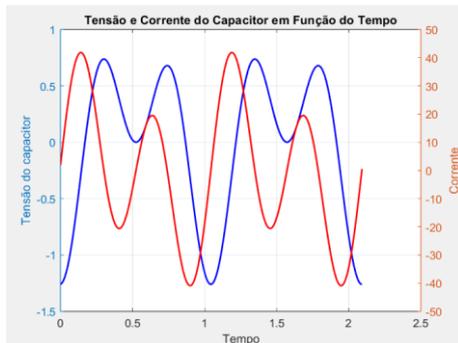


Fig. 5. Gráfico de tensão e corrente ao longo do tempo do capacitor.

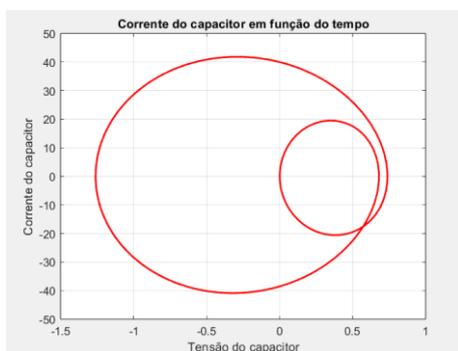


Fig. 6. Gráfico de tensão x corrente do capacitor.

Analisando o novo elemento, pode-se perceber o comportamento da sua corrente e tensão ao longo do tempo na Figura 7, mostrando que a sua corrente possui a presença apenas da primeira harmônica mesmo que sua tensão perceba as duas harmônicas presentes na fonte. Esse resultado era o esperado conforme a Equação 3.

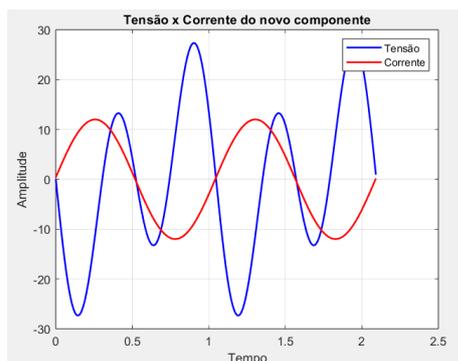


Fig. 7. Gráfico de tensão e corrente ao longo do tempo do novo elemento.

Já no gráfico de tensão x corrente do novo elemento, que pode ser visto na Figura 8, não havia um resultado prévio esperado de como se comportaria essa função de transferência. Porém esse resultado evidencia fortemente o formato da função de transferência de um memristor [5], que é caracterizada por um formato de oito que cruza a origem, esse componente eletrônico possui a capacidade de armazenar e lembrar a quantidade de carga elétrica que

passou por ele, o que o torna uma espécie de resistor com memória.

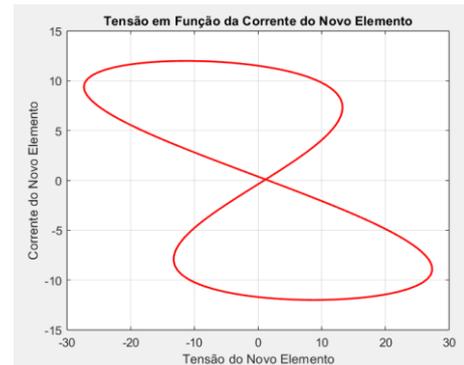


Fig. 8. Gráfico de tensão x corrente do novo elemento.

Importante ressaltar que esse resultado foi obtido especificamente para as condições citadas nesse caso, em trabalhos futuros, planeja-se testar o circuito com diferentes valores de H para observar o comportamento desse componente. Além de que, será avaliada a precisão da modelagem de um memristor através desse elemento fictício, assim como a aplicabilidade em circuitos mais complexos, por exemplo em redes de memristors.

## V. CONCLUSÃO

Partindo-se de um circuito contendo um elemento fictício que translada a componente espectral da sua tensão na  $(i)$ -ésima harmônica para uma componente espectral da sua corrente na  $(i-1)$ -ésima harmônica, além de zerar a componente em corrente contínua da sua corrente, uma análise HB linear foi realizada. Ao visualizar-se as curvas de tensão versus corrente do elemento fictício, verifica-se um comportamento semelhante a um memristor. Embora uma realização física deste elemento fictício não esteja disponível, a abordagem aqui apresentada tem o potencial de incentivar a busca por caracterizações lineares no domínio da frequência deste importante elemento de circuito conhecido como memristor que, no domínio do tempo, deve obrigatoriamente ser não linear e que tem ganho muita atenção recentemente por sua aplicação em redes neurais analógicas devido a sua capacidade de realizar multiplicações de matrizes (ou convoluções) com alto paralelismo.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. W. Nagel and D. O. Pederson, "SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis)," Memorandum No. ERL-M382, University of California, Berkeley, Apr. 1973.
- [2] C. K. Alexander and M. N. O. Sadiku, "Fundamentos de circuitos elétricos," Editora McGrawHill, Quinta edição, 2013.
- [3] S. A. Maas, "Nonlinear Microwave and RF Circuits," 2nd Edition, 2003.
- [4] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno," LTC Editora, sétima edição, 2002.
- [5] P. S. Georgiou, M. Barahona, S. N. Yaliraki, E. M. Drakakis, "On memristor ideality and reciprocity," *Microelectronics Journal*.
- [6] Chung-Wen Ho, A. Ruehli and P. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 22, no. 6, pp. 504-509, June 1975, doi: 10.1109/TCS.1975.1084079.