



Análise CA de Circuitos Contendo Elementos Passivos de Ordem Fracionária

Amanda Emanuele Gouvea Morente, Eduardo Gonçalves de Lima

Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil

amandamorente@ufpr.br eduardo.lima@ufpr.br

Resumo — No contexto educacional, ferramentas para simulações de circuitos são essenciais para o aprendizado prático de alunos e pesquisadores, pois facilitam a análise do comportamento dos circuitos em diferentes condições, promovem iterações rápidas de modificações, previnem falhas e diminuem custos. Neste contexto, existem diferentes tipos de análises: a análise em corrente contínua (CC), a análise em corrente alternada (CA), e a análise transitória. Tradicionalmente, dispositivos como capacitores e indutores, de natureza passiva dinâmica, presentes em circuitos elétricos possuem derivada inteira. Outros dispositivos de comportamento de sistemas dinâmicos, como amplificadores, também podem ser modelados, mas por meio de derivadas de ordem fracionária. Contudo, os simuladores de circuitos comerciais só permitem a análise de circuitos com derivada inteira. O objetivo deste trabalho é desenvolver e implementar análise CA de circuitos contendo elementos passivos de ordem fracionária. Para isso foram criados dois circuitos: um circuito com capacitor, para o qual foram implementadas análises analíticas (exata), CA (manualmente e QUCS) e transitória (manualmente e QUCS) e um circuito com componente de derivada fracionária onde foi implementada somente análise CA. Foi obtido que as curvas de tensão e corrente do capacitor formadas são senoidais, com a forma de onda da tensão com pico máximo em 92 V e pico mínimo em -92 V e a forma de onda da corrente com pico máximo em 180 A e pico mínimo em -180 A. As duas senoides possuem uma diferença de fase de 90°, de forma que, quando plotamos o gráfico da corrente pela tensão obtivemos uma curva em forma de elipse. As curvas de tensão e corrente do elemento de derivada fracionária formadas também são senoidais, com forma de onda da tensão com pico máximo em 180 V e pico mínimo em -180 V e a forma de onda da corrente com pico máximo em 134 A e pico mínimo em -134 A. Entretanto, as duas senoides possuem diferença de fase diferente de 90°, de forma que, quando plotamos o gráfico da corrente pela tensão obtivemos uma curva em forma de uma elipse com seu eixo maior deslocado.

1. INTRODUÇÃO

A simulação de circuitos elétricos é essencial no desenvolvimento de projetos, pois possibilita validar tal projeto antes de sua construção física, evitando possíveis erros e garantindo a otimização de tempo e recursos [1]. No contexto educacional, essas ferramentas são fundamentais para o aprendizado, permitindo que alunos e pesquisadores experimentem sem riscos. Além disso, a simulação também facilita a análise do comportamento dos circuitos em diversas condições, promove a iteração rápida de modificações e aumenta a confiabilidade dos projetos ao prever falhas e garantir funcionamento adequado em situações reais.

Na análise de circuitos elétricos, precisamos entender os diferentes tipos de resposta existentes, que são elas: resposta completa, resposta transitória e regime permanente [2]. A resposta completa refere-se à soma das respostas transitória e permanente, refletindo o comportamento total do circuito ao longo do tempo. A resposta transitória ocorre logo após uma perturbação, como por exemplo, a aplicação de uma tensão, e caracteriza-se por mudanças rápidas até que o sistema alcance um novo estado de equilíbrio. Já o regime permanente é alcançado quando as variáveis do circuito se estabilizam e o sistema responde de maneira constante a entradas contínuas, sem oscilações.

Dado um circuito elétrico conhecido qualquer, uma análise de circuitos busca, por meio de um conjunto de equações, determinar as tensões e corrente que permeiam os elementos deste circuito. Tal equacionamento pode ser realizado por meio das técnicas de análise de malhas, análise nodal ou nodal modificada, que facilitam a resolução de circuitos complexos. Existem também diferentes tipos de análises: a análise em corrente contínua (CC), que aborda circuitos com fontes constantes, a análise em corrente alternada (CA), que considera fontes variáveis no tempo, e a análise transitória, que estuda o comportamento do circuito durante as mudanças iniciais até o estabelecimento do regime permanente.

Tradicionalmente, os elementos passivos dinâmicos presentes em circuitos elétricos possuem derivada

inteira, sendo conhecidos como capacitores e indutores. Estudos recentes mostram que o comportamento de sistemas dinâmicos, como por exemplo amplificadores, também podem ser modelados por meio de derivadas de ordem fracionária. Contudo, os simuladores de circuitos comerciais só permitem a análise de circuitos com derivada inteira. O objetivo deste trabalho é desenvolver e implementar análise CA de circuitos contendo elementos passivos de ordem fracionária.

II. REVISÃO DA LITERATURA

A. Elementos Armazenadores de energia

O trabalho apresentado se concentra em elementos passivos, tais como capacitores e indutores, que são capazes de armazenar e fornecer quantidades finitas de energia. Ao contrário de fontes ideais, não podem mandar um fluxo de potência finita durante um intervalo de tempo infinito, sendo as relações tensão-corrente desses elementos dependentes do tempo.

B. Indutores

Definimos a relação tensão-corrente de um indutor por:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1)$$

onde v e i são funções do tempo.

Reescrevendo e integrando a equação:

$$di = \frac{1}{L} v dt \Rightarrow \int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (2)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0) \quad (3)$$

C. Capacitores

Definimos a relação tensão-corrente de um capacitor como:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (4)$$

, onde v e i são funções do tempo.

Integrando a equação, podemos expressar a tensão no capacitor em termos da corrente:

$$dv = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' + v(t_0) \quad (5)$$

D. Elementos Passivos de Ordem Fracionária

Elementos de ordem fracionária são classificados em dois grupos: elementos fracionários resistivos-capacitivos (RC- α) e resistivos-indutivos (RL- α) de ordem α .

O elemento RC- α é descrito pela seguinte equação:

$$i(t) = K_{RC}(\alpha) [{}_0D_t^\alpha u(t)] \quad (6)$$

Temos que para $\alpha = 0$ elemento fracionário é puramente resistivo, enquanto $\alpha = 1$ é puramente capacitivo. Aplicando a transformada de Laplace, temos que a impedância do elemento RC- α no domínio complexo é dada como:

$$Z_{RC-\alpha}(s) = \frac{1}{K_{RC}(\alpha)s^\alpha} \quad (7)$$

De forma similar, o elemento RL- α é descrito pela seguinte equação:

$$u(t) = K_{RL}(\alpha) [{}_0D_t^\alpha i(t)] \quad (8)$$

Temos assim que para $\alpha = 0$ elemento fracionário é puramente resistivo, enquanto $\alpha = 1$ é puramente indutivo. Aplicando a transformada de Laplace, temos que a impedância do elemento RL- α no domínio complexo é dada como:

$$Z_{RL-\alpha}(s) = K_{RL}(\alpha)s^\alpha \quad (9)$$

III. MATERIAIS E MÉTODOS

Para este trabalho foram escolhidos dois circuitos testes: um com capacitor e fonte senoidal e outro com elemento de derivada fracionária, ambos apresentados respectivamente nas figuras 1 e 2.

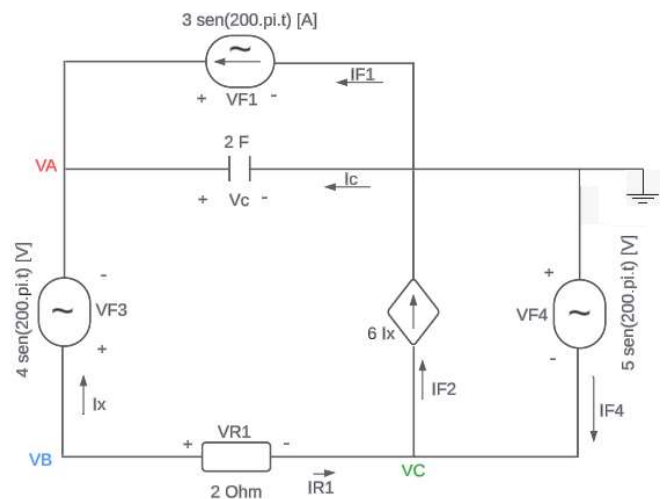


Figura 1: Circuito capacitivo com fonte senoidal

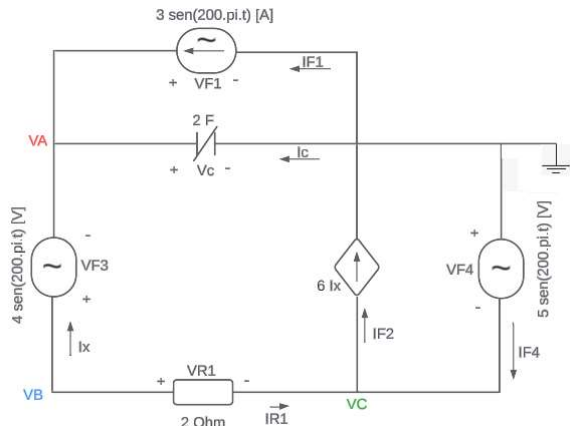


Figura 2: Circuito com componente de derivada fracionária

Os equacionamentos foram feitos manualmente utilizando análise nodal no primeiro circuito e análise nodal modificada no segundo, sendo a solução algébrica linear feita em Python utilizando a biblioteca sympy e numpy e a simulação sendo realizada no software QUCS. Para o circuito com capacitor, foram realizadas análises analíticas (exata) e transitória (manualmente e no QUCS) para comparação com os resultados da análise em CA. Como os resultados obtidos pelas diferentes abordagens foram muito próximos, este trabalho considerou apenas a análise em CA. Já para o circuito com componente de derivada fracionária foi implementada somente análise CA, não sendo possível realizar nenhuma comparação por indisponibilidade de outro método. Para todos os casos foi utilizada a condição inicial $V_c(0)=15$ V em $t=0$.

A. Discussão

Após a da análise em corrente alternada (CA) para o circuito com capacitor, foram plotados gráficos de corrente e tensão do capacitor em função do tempo e de corrente versus tensão no capacitor. As Fig. 3 e 4 apresentam as curvas de corrente e tensão do capacitor em função do tempo e a curva da corrente versus tensão para o capacitor, respectivamente.

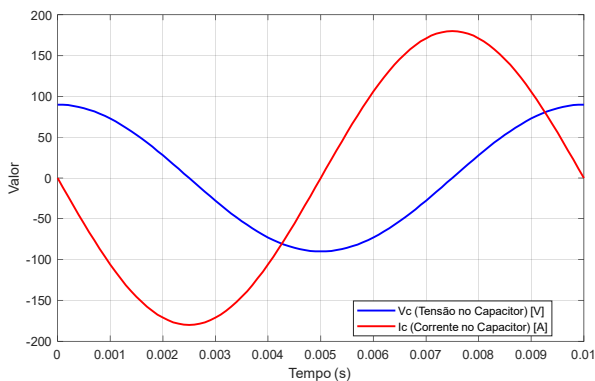


Figura 3: Curvas de corrente e tensão do capacitor em função do tempo

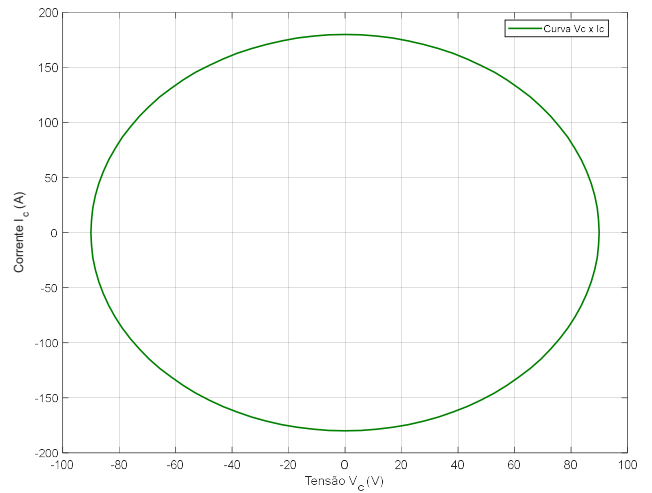


Figura 4: Curva de corrente versus tensão do capacitor

Temos que as curvas de tensão e correntes do capacitor formadas são senoidais. A forma de onda da tensão tem seu pico máximo em 92 V e seu pico mínimo em -92 V. Já a forma de onda da corrente tem seu pico máximo em 180 A e seu pico mínimo em -180 A. As duas senoides possuem uma diferença de fase de 90° , ou seja, quando a tensão é máxima ou mínima a corrente é zero, e quando a corrente é máxima ou mínima a tensão é zero, de forma que, quando plotamos o gráfico da corrente pela tensão obtemos uma curva em forma de elipse, assim como mostrado na Fig. 4.

As Fig. 5 e 6 apresentam as curvas de correntes e tensão no elemento de derivada fracionária em função do tempo e a curva da corrente versus tensão para ele, respectivamente:

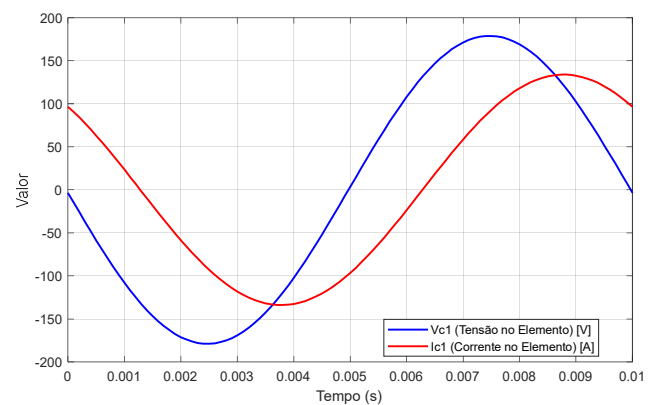


Figura 5: Curvas de corrente e tensão do elemento de derivada fracionária em função do tempo

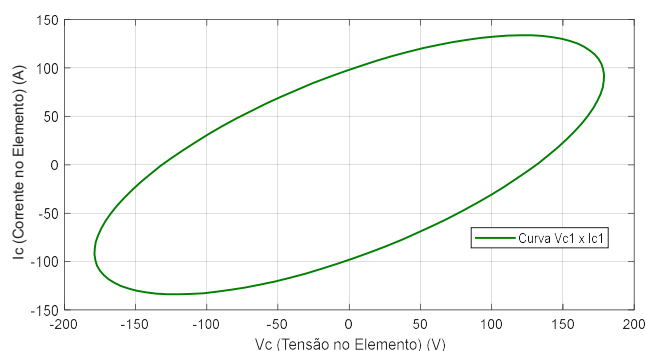


Figura 6: Curva de corrente versus tensão do elemento de derivada fracionária

As curvas de tensão e correntes do elemento de derivada fracionária formadas também são senoidais. A forma de onda da tensão tem seu pico máximo em 180 V e seu pico mínimo em -180 V. Já a forma de onda da corrente tem seu pico máximo em 134 A e seu pico mínimo em -134 A. As duas senoides possuem uma diferença de fase diferente de 90° , com máximos e mínimos de tensão/corrente que não coincidem com zeros de corrente/tensão, de forma que, quando plotamos o gráfico da corrente pela tensão obtemos uma curva em forma de uma elipse com seu maior deslocado, assim como mostrado na Fig. 6.

IV. CONCLUSÃO

Os simuladores de circuitos comerciais disponíveis atualmente são projetados para analisar circuitos com

derivadas inteiras, o que limita sua capacidade de lidar com sistemas que envolvem elementos de ordem fracionária. Neste trabalho, focamos na análise de circuitos em corrente alternada (CA) que incorporam elementos com derivada fracionária, ampliando o escopo das ferramentas tradicionais. Contudo, é importante notar que a análise CA é restritiva quando se trata de circuitos lineares e, portanto, não abrange completamente o comportamento de circuitos não lineares. Como próximo passo, propomos investigar a análise em regime permanente de circuitos não lineares que contenham elementos de ordem fracionária, para explorar e entender com maior profundidade o impacto desses elementos em sistemas mais complexos e realistas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação Araucária de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Estado do Paraná (FA) no âmbito do Programa PIBIS FA UFPR 2023/2024.

REFERÊNCIAS

- [1] C. K. Alexander e M. N. O. Sadiku, Fundamentos de circuitos elétricos. Editora McGrawHill, Quinta edição, 2013.
- [2] G. D. Vendelin, A. M. Pavio, M. Rudolph, U. L. Rohde, Microwave Circuit Design Using Linear and Nonlinear Techniques. Wiley, 2021.
- [3] BOŠKOVIĆ, Marko Č. et al. Analysis of electrical circuits including fractional order elements. In: 2017 6th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO). IEEE, 2017. p. 1-6.