



Modelagem Matemática de Amplificadores de Potência Usando Ordens Polinomiais Esparsas

Maria Eduarda Rizo, Eduardo Gonçalves de Lima
Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil
rizo@ufpr.br eduardo.lima@ufpr.br

Resumo— Este estudo analisa a modelagem comportamental de amplificadores de potência (PA) por meio de polinômios de memória com esparsidade aplicada a não linearidades e atrasos. A proposta busca melhorar a relação entre precisão e complexidade, utilizando-se de um modelo com sinais complexos e número de coeficientes fixo em 9, variando os valores de potência e memória. Foram considerados modelos com todas as potências e modelos com apenas potências pares, aplicados à modelagem direta e inversa, com avaliação por meio do Erro Quadrático Médio Normalizado (NMSE). O uso de não linearidades e atrasos esparsos reduziu o NMSE em até 0,2166 dB em comparação ao uso de todas as não linearidades e atrasos. O menor erro obtido foi de -32,7632 dB com a modelagem inversa, empregando todas as potências da amplitude. Esses resultados evidenciam o potencial do método proposto para reduzir a complexidade computacional sem sacrificar a precisão da modelagem.

I. INTRODUÇÃO

A modelagem de amplificadores de potência (PAs) é essencial em sistemas de comunicação sem fio, enfrentando desafios contínuos ao equilibrar a precisão e a complexidade computacional dos modelos [1]. Trabalhos anteriores [2] abordaram a modelagem de PAs usando polinômios de memória (MP) com todas as potências de amplitude e com a utilização de atrasos esparsos, com foco em reduzir os erros de modelagem. Este trabalho, diferentemente, introduz uma abordagem inovadora aplicando esparsidade nas não linearidades e simultaneamente nos atrasos dentro do modelo de MP, visando melhorar a eficiência e precisão, com potencial impacto para sistemas de alta frequência que operam em condições de saturação.

O trabalho de modelagem de PA desenvolvido tem grande potencial de aplicação em sistemas de comunicação sem fio, onde controlar e prever o comportamento não linear e os efeitos de memória dos PAs é essencial. Tais características são críticas para garantir a qualidade e a integridade dos sinais transmitidos, especialmente em dispositivos que operam sob condições de alta frequência e saturação. Ao utilizar

modelos baseados em polinômios de memória com sinais complexos e um número otimizado de coeficientes (fixado em 9), este estudo contribui para o desenvolvimento de algoritmos que, além de melhorarem a precisão, tornam a modelagem mais eficiente. Assim, a proposta permite reduzir o número de coeficientes e otimizar o processamento, sem comprometer a fidelidade do modelo, beneficiando significativamente a aplicação em tecnologias de comunicação modernas.

Neste trabalho, duas abordagens de modelagem, a direta e a inversa, foram utilizadas, cada uma ilustrada na Figura 1, destacando as suas diferenças. Na modelagem direta, a entrada do modelo é a entrada do próprio PA, enquanto a saída do modelo é a saída do PA, com um erro entre a saída medida e a saída estimada, que foi calculado ao final do trabalho, utilizando o erro quadrático médio normalizado (NMSE). Na modelagem inversa, por outro lado, a entrada do modelo é a saída do PA, e a saída do modelo é a entrada do PA, com um erro entre a saída medida e a saída estimada que também será calculado utilizando o NMSE.

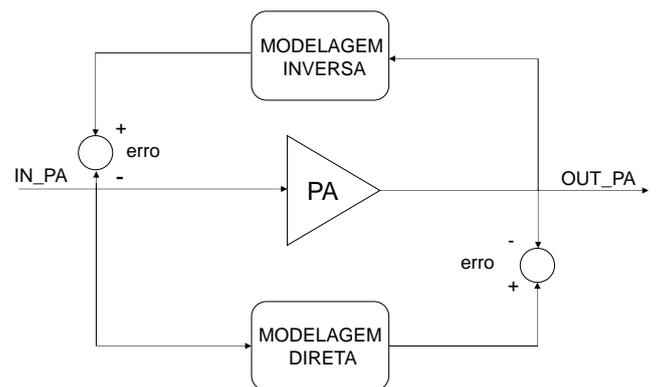


Fig. 1. Diferença entre modelagem direta e modelagem inversa.

II. REVISÃO DA LITERATURA

Quando as não linearidades e os efeitos de memória são pequenos, uma alternativa acessível é o uso de MP [3]. Originalmente [4], um MP com todas as potências da amplitude (pares e ímpares) foi proposto, com a seguinte equação:

$$\tilde{y}(n) = \sum_{p=1}^P \sum_{m=0}^M \tilde{b}_{2p-1,m} |\tilde{x}(n-m)|^{p-1} \tilde{x}(n-m) \quad (1)$$

No entanto, também é abordado neste trabalho o MP que também é linear nos coeficientes mas utiliza apenas as potências pares, e tem a seguinte equação:

$$\tilde{y}(n) = \sum_{p=1}^P \sum_{m=0}^M \tilde{b}_{2p-1,m} |\tilde{x}(n-m)|^{2p-2} \tilde{x}(n-m) \quad (2)$$

onde P e M são o truncamento da ordem polinomial e a duração da memória, respectivamente, $\tilde{x}(n)$ e $\tilde{y}(n)$ são o envoltório complexo na entrada e saída do PA, respectivamente, e $\tilde{b}_{2p-1,m}$ são coeficientes complexos. Todas as ordens polinomiais ainda são utilizadas, mas nem todos os atrasos são usados.

A Tabela I tem o objetivo de exemplificar o que seria a esparsidade na não linearidade e no atraso, onde temos a saída $\tilde{y}(n)$ da equação (1), para quando $\mathbf{P}=2$ e $\mathbf{M}=1$, para o caso do MP Completo, $\mathbf{P}=2$ e $\mathbf{M}=2$ para o MP com a esparsidade no atraso e $\mathbf{P}=3$ e $\mathbf{M}=1$ para o MP com a esparsidade na não linearidade.

Tabela I. Diferença entre o MP Completo, MP com a esparsidade no atraso e MP com esparsidade na não linearidade.

MP COMPLETO	$\tilde{y}(n) = \tilde{b}_{1,0} \tilde{x}(n) ^0 \tilde{x}(n) + \tilde{b}_{1,1} \tilde{x}(n-1) ^0 \tilde{x}(n-1) + \tilde{b}_{2,0} \tilde{x}(n) ^1 \tilde{x}(n) + \tilde{b}_{2,1} \tilde{x}(n-1) ^1 \tilde{x}(n-1)$
MP COM ESPARSIDADE NO ATRASO	$\tilde{y}(n) = \tilde{b}_{1,0} \tilde{x}(n) ^0 \tilde{x}(n) + \tilde{b}_{1,2} \tilde{x}(n-2) ^0 \tilde{x}(n-2) + \tilde{b}_{2,0} \tilde{x}(n) ^1 \tilde{x}(n) + \tilde{b}_{2,2} \tilde{x}(n-2) ^1 \tilde{x}(n-2)$
MP COM ESPARSIDADE NA NÃO LINEARIDADE	$\tilde{y}(n) = \tilde{b}_{1,0} \tilde{x}(n) ^0 \tilde{x}(n) + \tilde{b}_{1,1} \tilde{x}(n-1) ^0 \tilde{x}(n-1) + \tilde{b}_{3,0} \tilde{x}(n) ^2 \tilde{x}(n) + \tilde{b}_{3,1} \tilde{x}(n-1) ^2 \tilde{x}(n-1)$

Depois de analisar a tabela, é possível perceber que, para o MP com esparsidade no atraso, estão faltando elementos da memória, que são representados por elementos que variam de $\tilde{x}(n-m)$, quando comparado com o MP completo. Já para o caso do MP com esparsidade na não linearidade os elementos faltantes são os que variam de $|\tilde{x}(n-m)|^{p-1}$.

III. MATERIAIS E MÉTODOS

Utilizou-se um amplificador de potência classe AB construído com transistor de alta mobilidade de elétrons (HEMT) em tecnologia GaN, ideal para frequências elevadas e com características de eficiência energética e linearidade. Os dados foram coletados com um analisador de sinal vetorial (VSA) Rohde & Schwarz FSQ, a uma frequência de amostragem de 61,44 MHz, com 4500 amostras em cada fase de extração e validação. A

esparsidade foi aplicada seletivamente, tanto nas não linearidades quanto nos atrasos, em MPs com potências pares ou todas as potências, buscando reduzir o número de coeficientes e complexidade. O número de coeficientes foi mantido fixo em 9 ($\mathbf{P}=3$, $\mathbf{M}=2$), permitindo uma modelagem precisa e aplicável a operações em tempo real. A ordem polinomial varia de 1 a 5, enquanto a duração máxima da memória também é 5, começando em 0 e indo até 5.

Os modelos resultantes abrangem dois cenários principais: no caso em que os valores de potência e memória estão fixos (por exemplo, com $\mathbf{P}=3$ e $\mathbf{M}=3$), os valores de potência serão 1, 2 e 3, enquanto os valores de memória serão 0, 1 e 2, resultando em apenas um cenário de memória. Quando os valores de potência variam, para um dado $\mathbf{P} = p$, teremos C diferentes cenários:

$$C_p^5 = \frac{5!}{p! * (5-p)!} \quad (3)$$

Podemos usar a mesma análise para quando os valores de memória variarem, exceto que como temos 6 possíveis valores de memória, a equação dos C cenários, para $\mathbf{M}=m$, ficaria:

$$C_m^6 = \frac{6!}{m! * (6-m)!} \quad (4)$$

Em todos os casos, tivemos a mesma possibilidade de modelos: o caso geral, onde tanto a potência quanto a memória variavam, e os casos específicos que são variações do caso geral: quando todos os valores de memória estavam fixos e os valores de potência variavam, quando os valores de potência permaneciam fixos enquanto os valores de memória variavam, e modelos nos quais tanto a potência quanto a memória estavam fixos. Como o caso geral é quando ambos os valores variam, o esperado é que os melhores valores finais aconteçam nesses casos.

IV. RESULTADOS

Os resultados das modelagens foram calculados, em dB, utilizando o NMSE, como na equação abaixo:

$$NMSE_{dB} = 10 \log \frac{\sum_{n=1}^N |Y_{medido} - Y_{estimado}|^2}{\sum_{n=1}^N |Y_{estimado}|^2} \quad (5)$$

Em que Y_{medido} é o valor do sinal de validação medido e $Y_{estimado}$ é o valor do sinal de estimado e N é o número de amostras de validação, 4500.

Os resultados são relatados em quatro subseções. As subseções IV.A e IV.B utilizam o MP com apenas potências pares de amplitude, conforme a equação (2), enquanto as subseções IV.C e IV.D utilizam o MP com todas as potências de amplitude, conforme a equação (1).

A. Modelagem direta usando MP com apenas potências pares.

Quando a modelagem direta foi usada em conjunto com as potências pares os valores de NMSE encontrados, em dB, estão indicados na Tabela II.

Tabela II. Valores de NMSE, em dB, para modelagem direta utilizando MP com apenas potências pares.

Valores de P e M	Valores de P e M estão variando	Valores de P estão fixos e os de M estão variando	Valores de P estão variando e os de M estão fixos	Valores de P e M estão fixos
P=3 M=2	-32,2073	-32,2073	-29,2644	-29,2644

Após analisar a Tabela II, é possível perceber que a aplicação de atrasos simultâneos apresentou desempenho igual ao de atrasos esparsos e superior ao de não linearidades esparsas isoladas, destacando que, nesse caso, a esparsidade nos atrasos proporciona maior benefício para a modelagem direta com potências pares.

Em seguida, temos os gráficos de amplitude de saída versus amplitude de entrada (AM-AM) para o melhor caso mostrado na Tabela II, tanto para os dados medidos quanto para os dados estimados, ilustrando a boa correspondência entre os valores medidos e estimados.

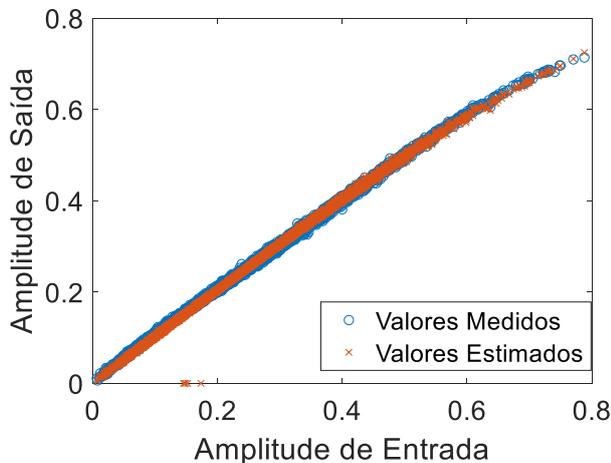


Fig. 2. Valores de saída baseados nos valores de entrada.

B. Modelagem inversa usando MP com apenas potências pares.

Quando a modelagem inversa foi usada em conjunto com potências pares, os valores de NMSE obtidos, em dB, estão indicados na Tabela III.

Tabela III. Valores de NMSE, em dB, para modelagem inversa utilizando MP com apenas potências pares.

Valores de P e M	Valores de P e M estão variando	Valores de P estão fixos e os de M estão variando	Valores de P estão variando e os de M estão fixos	Valores de P e M estão fixos
P=3 M=2	-32,4736	-32,4736	-29,3593	-29,3593

Na modelagem inversa com potências pares, a aplicação de atrasos simultâneos obteve resultados iguais aos de atrasos esparsos, superando as configurações com apenas não linearidades esparsas. Isso demonstra que a esparsidade nos atrasos é mais vantajosa para a precisão da modelagem neste contexto.

Na Figura 3 temos os gráficos de AM-AM para o melhor caso da Tabela III, tanto para os dados medidos quanto para os dados estimados.

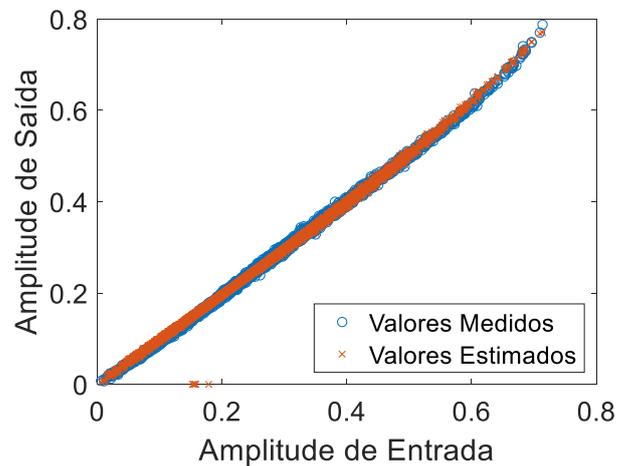


Fig. 3. Valores de saída baseados nos valores de entrada.

C. Modelagem direta usando MP com todas as potências.

A mesma modelagem direta foi usada como anteriormente, mas desta vez todas as potências foram utilizadas. Novamente, tivemos as mesmas possibilidades de modelos e os valores de NMSE obtidos, em dB, são mostrados na Tabela IV.

Tabela IV. Valores de NMSE, em dB, para modelagem direta utilizando MP com todas as potências.

Valores de P e M	Valores de P e M variando	Valores de P estão fixos e os de M estão variando	Valores de P estão variando e os de M estão fixos	Valores de P e M estão fixos
P=3 M=2	-32,6228	-32,5791	-32,5791	-32,5791

A modelagem direta com todas as potências mostrou que o uso de apenas um tipo de esparsidade resulta em desempenho igual ao de um modelo sem esparsidade. No entanto, ao aplicar ambos os tipos de esparsidade simultaneamente, observou-se uma melhora significativa, evidenciando a vantagem dessa configuração para otimizar a precisão.

Além disso, temos os gráficos de amplitude de saída versus amplitude de entrada para o melhor caso da Tabela IV, mostrado na Figura 4, tanto para os dados medidos quanto para os dados estimados.

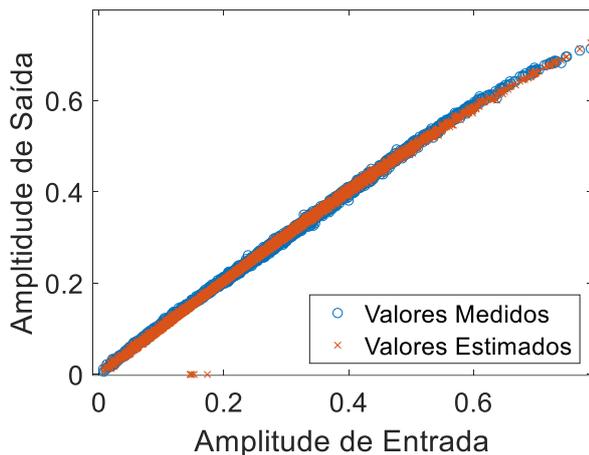


Fig. 4. Valores de saída baseados nos valores de entrada.

D. Modelagem inversa usando MP com todas as potências.

Novamente, tivemos as mesmas possibilidades de modelos e os valores de NMSE, em dB, obtidos são mostrados na Tabela V.

Tabela V. Valores de NMSE, em dB, para modelagem inversa utilizando MP com todas as potências.

Valores de P e M	Valores de P e M variando	Valores de P estão fixos e os de M estão variando	Valores de P estão variando e os de M estão fixos	Valores de P e M estão fixos
P=3 M=2	-32,7632	-32,5466	-32,7632	-32,5466

Na modelagem inversa com todas as potências, a aplicação de atrasos simultâneos teve desempenho tão eficiente quanto somente não linearidades esparsas, e ambos superaram as configurações que utilizaram somente atrasos esparsos. Esse resultado destaca o impacto positivo de uma abordagem combinada, reforçando a eficácia da esparsidade nos atrasos e nas não linearidades para aprimorar a precisão do modelo.

Na Figura 5 temos os gráficos de AM-AM para o melhor caso da Tabela V, tanto para os dados medidos quanto para os dados estimados.

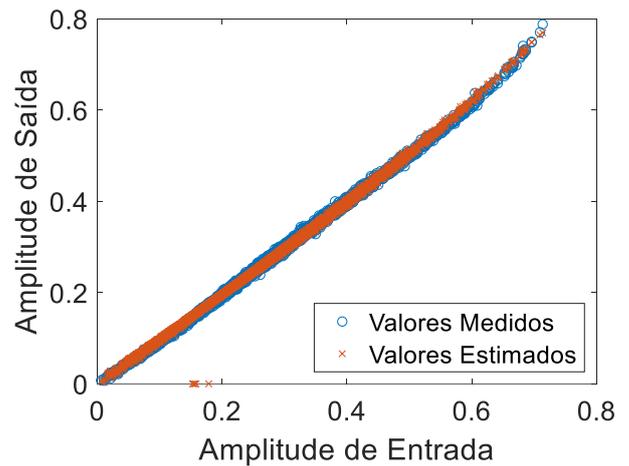


Fig. 5. Valores de saída baseados nos valores de entrada.

V. CONCLUSÃO

Este trabalho analisou os benefícios da utilização de um MP com não linearidades esparsas, enfatizando a aplicação simultânea de não linearidades e atrasos esparsos, evidenciando que o método proposto permite uma redução de complexidade computacional sem comprometer a precisão. A partir das métricas estabelecidas, foi possível determinar a modelagem mais eficaz entre as abordagens direta e inversa, além de avaliar o impacto do uso exclusivo de potências pares em comparação com todas as potências disponíveis.

Os resultados obtidos indicam que o melhor NMSE, de -32,7632 dB, foi alcançado com a modelagem inversa utilizando todas as potências. A introdução das não linearidades esparsas foi fundamental para esse resultado, pois possibilitou uma representação mais precisa e flexível do sistema em análise, melhorando significativamente o equilíbrio entre precisão e complexidade. Essa abordagem provou ser eficaz, pois a ausência das não linearidades esparsas resultaria em um aumento aproximado de 0,2 dB no NMSE.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o apoio financeiro fornecido pelo Conselho Nacional de Ciência e Tecnologia Desenvolvimento (CNPq) no âmbito do Programa PIBITI UFPR 2022.

REFERÊNCIAS

- [1] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1987.
- [2] H. Ku and J. S. Kenney, "Behavioral modeling of nonlinear RF power amplifiers considering memory effects," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 51, no. 12, pp. 2495–2504, Dec. 2003.
- [3] J. Kim and K. Konstantinou, "Digital predistortion of wideband signals based on power amplifier model with memory," *Electron. Lett.*, vol. 37, no. 23, pp. 1417–1418, Nov. 2001.
- [4] L. Ding and G. T. Zhou, "Effects of even-order nonlinear terms on power amplifier modeling and predistortion linearization," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, no. 1, pp. 156–162, Jan. 2004.